Exercice 3. a) Ensemble de définition :

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Par théorème généraux d'opérations, f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

b) Pas de parité ni de périodicité.

c) Etude des variations :

• Pour $x > 2$ ou $x \leq 2$, $f(x) = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}\sqrt{x^2 - 4}$.

Alors $f'(x) = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{4x + 3\sqrt{x^2-4}}{5\sqrt{x^2-4}}$. Il est clair que $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 2$.

Pour $x < -2$, on considère l'expression conjuguée : $f'(x) = \dfrac{16x^2 - 9(x^2-4)}{5\sqrt{x^2-4}(4x - 3\sqrt{x^2-4})} = \dfrac{7x^2 + 36}{5\sqrt{x^2-4}(4x - 3\sqrt{x^2-4})} < 0$. Donc f est croissante sur $]-\infty, -2]$ et sur $[2, +\infty[$.

• Pour $x \in]-2, 2[$, $f(x) = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}\sqrt{4 - x^2}$. Alors $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{4-x^2} - 4x}{5\sqrt{4-x^2}}$.

Pour $x \in]-2, 0]$, $f'(x) \geq 0$ clairement.

Pour $x \in [0, 2[$, même méthode d'expression conjuguée :

$$f'(x) = \frac{9(4-x^2) - 16x^2}{5\sqrt{4-x^2}(3\sqrt{4-x^2} + 4x)} = \frac{36 - 25x^2}{5\sqrt{4-x^2}(3\sqrt{4-x^2} + 4x)} = \frac{(6-5x)(6+5x)}{5\sqrt{4-x^2}(3\sqrt{4-x^2} + 4x)}$$

Donc f' est positive sur $]0, \dfrac{6}{5}[$ et négative sur $]\dfrac{6}{5}, 2[$.

On obtient le tableau de variation, en mettant déjà les limites cf d).

x	$-\infty \quad -2 \quad 0 \quad \frac{6}{5} \quad 2 \quad +\infty$
f'	$- \quad \| + \quad \frac{3}{5} \quad + \quad 0 \quad - \quad \| \quad +$
f	$+\infty \searrow -\frac{6}{5} \nearrow \frac{8}{5} \nearrow 2 \searrow \frac{6}{5} \nearrow +\infty$

d) Etude des limites :

• En $+\infty$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ comme somme de deux fonctions tendant vers $+\infty$.

• En $-\infty$: on a une forme indéterminée $-\infty + \infty$

Mais pour tout $x \in]-\infty, -2[$:

$$f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{x^2-4} = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{x^2(1 - \frac{4}{x^2})} = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}|x|\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = x[\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}].$$

Quand $x \to -\infty$ le dernier crochet tend vers $-\dfrac{1}{5}$, donc $f(x) \to +\infty$.

e) Etude de l'existence d'une asymptote en $+\infty$. On se place pour $x \geq 2$.

On étudie $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}\sqrt{1 - \dfrac{4}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{7}{5}$.

On étudie alors $f(x) - \dfrac{7}{5}x = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{4}{5}\sqrt{x^2-4} = \dfrac{4}{5}\dfrac{(x^2-4) - x^2}{\sqrt{x^2-4} + x} = \dfrac{-16}{5(\sqrt{x^2-4} + x)}$.

Donc $f(x) - -\dfrac{7}{5}x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la droite d'équation $y = \dfrac{7}{5}x$ est asymptote au graphe Γ_f en $+\infty$.

f) Etude de l'existence d'une asymptote en $-\infty$: par la même méthode, on obtient que la droite D' d'équation $y = -\dfrac{1}{5}x$ est asymptote au graphe de f en $-\infty$.

g) Etude au point particulier d'abscisse $x = 2$.

• pour $h > 0$, $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{4+h}{h}} \underset{h\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

• pour $h < 0$ $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{|4+h|}{-h}} \underset{h\to0^-}{\longrightarrow} -\infty$.

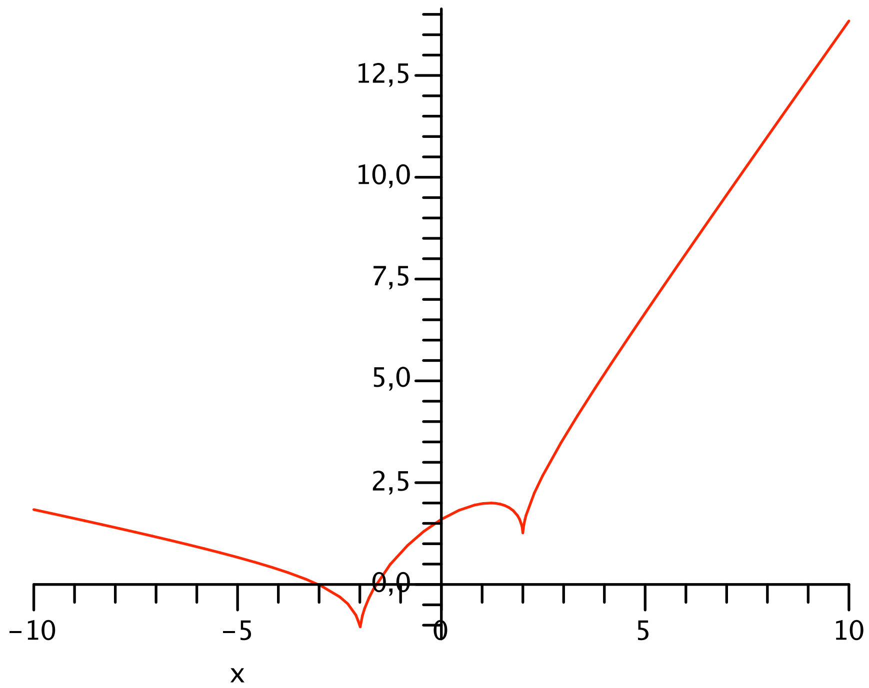
La courbe présente au point $(2, \dfrac{6}{5})$ deux demi-tangentes verticales opposées : on a un *point de rebroussement*.

h) Etude au point d'abscisse $x = -2$. Analogue : $\dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \underset{h\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $\dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \underset{h\to0^-}{\longrightarrow} -\infty$ et même conclusion. i) Tracé en MAPLE : page suivante

> $f := \frac{3}{5} \cdot x + \frac{4}{5} \cdot \mathrm{sqrt}(\mathrm{abs}(-x^2 + 4));$

$$f := \frac{3}{5}\,x + \frac{4}{5}\,\sqrt{|x^2 - 4|}$$

> $plot(f, x, scaling = constrained);$



>

Exercice 5. *Condition nécessaire* On note (r_n), (b_n), (v_n) les populations successives de rouges, bleu, vert. A l'étape 0, (r_0, b_0, v_0) est le (r, b, v) de l'énoncé. On remarque qu'à chaque rencontre, les différences deux à deux $r_n - b_n$, $r_n - v_n$ et $b_n - v_n$, ne changent pas modulo 3.

En effet, pour les deux qui se rencontrent à l'étape n, p.ex. un rouge et un bleu, on a $r_{n+1} = r_n - 1$ et $b_{n+1} = b_n - 1$ donc $r_{n+1} - b_{n+1} = r_n - b_n$. Et alors $v_{n+1} = v_n + 2$. donc $v_{n+1} - r_{n+1} = v_n - r_n + 3 \equiv v_n - r_n [3]$.

Si donc il existe une étape N telle qu'il ne reste plus qu'une couleur, p.ex. $r_N = T$, $b_N = v_N = 0$ on a donc $b_n - v_n \equiv 0\,[3]$ pour tout n.

Conclusion sur la condition nécessaire – S'il est possible d'avoir tous les caméléons de même couleur (p.ex. rouge), alors les deux autres couleurs doivent avoir au départ le même effectif modulo 3 (dans notre exemple $b \equiv v \quad [3]$)

Montrons que la condition précédente est suffisante – On considère donc un triplet (r_0, b_0, v_0) avec (p.ex.) $b_0 \equiv v_0\,[3]$.

Si, sans restriction de généralité, $b_0 > v_0$ (le cas $b_0 = v_0$ est très facile), on fait d'abord se rencontrer tous les v_0 verts avec un bleu. On arrive alors, en notant $n_1 = v_0$, à l'étape n_1 à $b_{n_1} = b_0 - v_0 := b'$, $v_{n_1} = 0$ et $r_{n_1} = r_0 + 2v_0 = r'$.

Procédure à ce stade – On fait alors se rencontrer un rouge avec un bleu, pour avoir le triplet $(r' - 1, b' - 1, 2)$. On fait alors se rencontrer chacun des deux verts créés avec un bleu (ce qui est possible car $b' \geq 3$ car $b' \equiv 0[3]$ et $b' > 0$). Ainsi deux rencontres après : on obtient $(r' + 3, b' - 3, 0)$.

Là c'est gagné : on réapplique la procédure précédente k fois si on note $b' = 3k$. Et on obtient : $(r' + 3k, 0, 0)$ ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque (généralisation) : états accessibles

Si on prend deux états (r, b, v) et (r', b', v') de la population de caméléon, peut-on passer de l'un à l'autre par jeu des rencontre ?

Réponse – La première condition nécessaire est bien sûr la même, sur les différences modulo 3. Il y a cette fois une deuxième condition nécessaire : si un état est unicolore, on ne peut pas passer à un autre état ; on ne peut plus rien faire quand la population est unicolore.

Réciproque : si (r, b, v) n'est pas unicolore, et si (r', b', v') vérifie que les différences deux à deux des $'$ sont les mêmes modulo 3 que celles des 'sans primes' alors on peut passer de (r, b, v) à (r', b', v').

En effet : si on reprend la démo précédente....

Exercice 2. Indication de Solution – il faut dire d'abord que seules les règles R2 et R3 modifient le nombre de I dans le mot. Or R2 va le multiplier par 2 et R3 va y retrancher 3. Donc si on note N(k) le nombre de I dans le mot obtenu à l'étape k, à l'étape k+1, on a ou bien N(k+1) congru à N(k) mod 3 (si on applique R1, R3,R4), ou bien N(k+1)=2N(k) congru à -N(k) mod. 3.

En conclure que, en partant de N(1)=1, il n'est pas possible qu'il y a un k tel que N(k) soit congru à 0 mod. 3.

Exercice 4. Indication de Solution : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.

On pose $u(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$. On dérive : $u'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x = 2^x(e^x - x - 1) \geq 0$ et nul seulement en 0.

Donc u est st. croissante, $u(0) = 0$, donc $u < 0$ sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $u > 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc f st. décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et st. croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

En fait : Parité cachée, mais si on calcule, on a : $f(-x) = \cdots = f(x)$ pour tout x.

Branche infinie en $+\infty$: asymptote d'équation $y = 1/2x$.