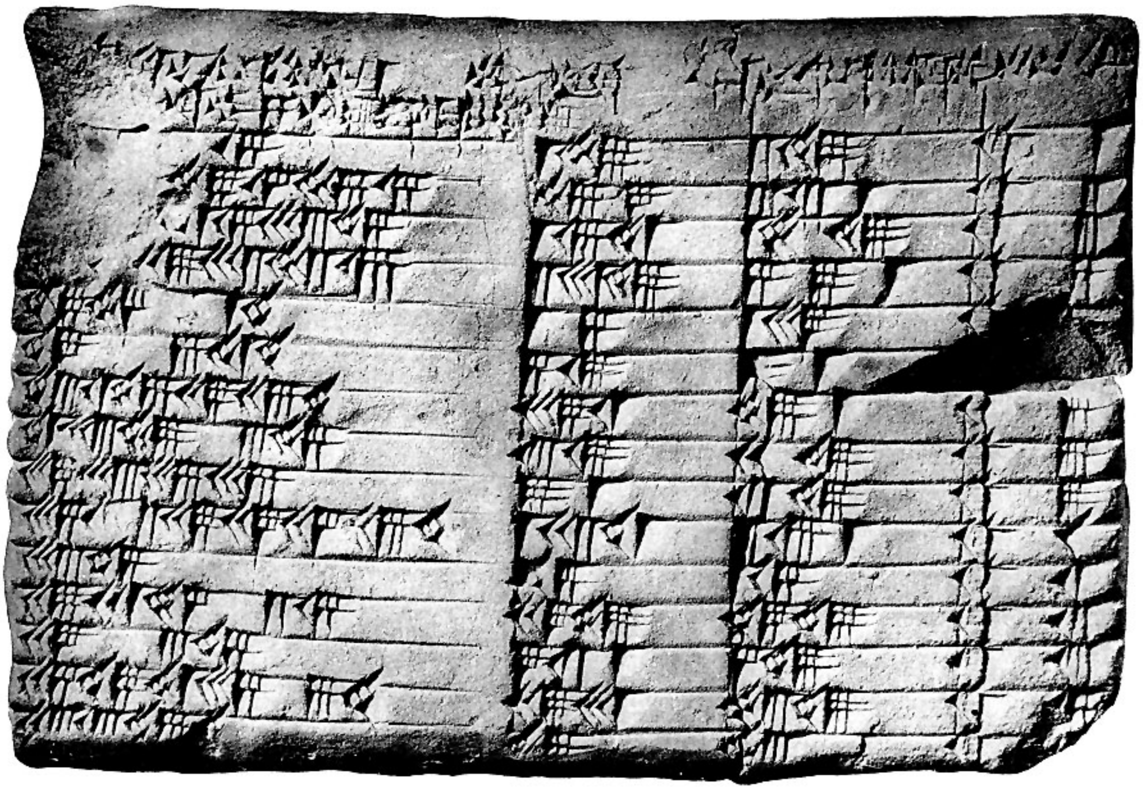
MPSI - MP2I - PCSI Lycée Joffre
2023/2024

Cahier de calcul

— pratique et entraînement —



Plimpton 322, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets (a, b, c) de nombres entiers vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

Coordination

Colas BARDAVID

Équipe des participants

Vincent BAYLE, Romain BASSON, Olivier BERTRAND, Ménard BOURGADE, Julien BUREAUX, Alain CAMANES, Mathieu CHARLOT, Mathilde COLIN DE VERDIÈRE, Keven COMMAULT, Miguel CONCY, Rémy EUPHERTE, Hélène GROS, Audrey HECHNER, Florian HECHNER, Marie HÉZARD, Nicolas LAILLET, Valérie LE BLANC, Thierry LIMOGES, Quang-Thai NGO, Xavier PELLEGRIN, Fabien PELLEGRINI, Jean-Louis POURTIER, Valérie ROBERT, Jean-Pierre TÉCOURT, Guillaume TOMASINI, Marc TENTI

Le pictogramme 🕓 de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).

La photographie de la couverture vient de Wikipedia.

Version 11 — 23 juin 2022

Sommaire

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur le programme de mathématiques collège/lycée ainsi que sur le programme de première année post-Bac. Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur de maths mais est un outil pour vous aider à vous améliorer en calcul.

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études post-Bac.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant de voir d'un seul coup d'œil les différentes fiches et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie de **calculs élémentaires**, faisables dès le début de la première année, centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Une partie liée au programme de première année : sont indiqués précisément les chapitres nécessaires pour pouvoir aborder chaque fiche de calcul.
- Les réponses brutes ainsi que les corrigés détaillés, qui sont à la fin du cahier.

Chaque fiche de calcul est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis (notamment, pour des techniques propres à certaines filières, on précise de quelle filière il s'agit)
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (), deux (), trois () ou quatre () horloges.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Comment l'utiliser ?

Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez les calculs que vous faites en fonction des difficultés que vous rencontrez et des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur de mathématiques.

Pensez aussi à l'utiliser à l'issue d'un DS ou d'une colle, lorsque vous vous êtes rendu compte que certains points de calcul étaient mal maîtrisés.

Enfin, ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire 10 fiches par jour pendant les vacances » .

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme, mais si vous étudiez sérieusement les fiches de ce cahier, vous verrez assez rapidement des progrès apparaître, en colle, en DS, *etc.* Une bonne connaissance du cours combinée à une plus grande aisance en calcul, c'est un très beau tremplin vers la réussite en prépa ou dans vos études !

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse `cahierdecalcul@gmail.com`. Si vous pensez avoir décelé une erreur, merci de donner aussi l'identifiant de la fiche, écrit en gris clair en haut à droite de chaque fiche.

Énoncés

Fractions

Prérequis
Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $\dfrac{32}{40}$ ....

b) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2}$ ....

c) $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$ ....

d) $\dfrac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$ ....

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3}$ ....

b) $\dfrac{2}{3} - 0{,}2$ ....

c) $\dfrac{36}{25} \times \dfrac{15}{12} \times 5$ ....

d) $-\dfrac{2}{15} \div (-\dfrac{6}{5})$ ....

Calcul 1.3

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7})$ ....

b) $\left(\dfrac{136}{15} - \dfrac{28}{5} + \dfrac{62}{10}\right) \times \dfrac{21}{24}$ ....

c) $\dfrac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$ ....

d) $\dfrac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$ ....

Calcul 1.4 — Un petit calcul.

Écrire $\dfrac{0{,}5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \dfrac{0{,}5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0{,}2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3{,}5}$ sous forme d'une fraction irréductible. ....

Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.

En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\dfrac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021)(2\,023)}$ ..

b) $\dfrac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2}$ ....

c) $\dfrac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235}$ ....

d) $\dfrac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001}$ ...

Calcul 1.6 — **Les fractions et le calcul littéral.**

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

a) $\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ ....

b) $\dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux. ....

c) $\dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. ....

Calcul 1.7 — **Le quotient de deux sommes de Gauss.**

Simplifier $\dfrac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^{n} k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1 + 2 + \cdots + p = \dfrac{p(p+1)}{2}$. .....

Calcul 1.8 — **Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.**

Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \dfrac{b}{X}$ avec a et b entiers et $X \in \mathbb{R}$.

a) $\dfrac{29}{6}$ ...... b) $\dfrac{k}{k-1}$ ... c) $\dfrac{3x-1}{x-2}$ ..

Calcul 1.9 — **Un produit de fractions.**

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On donne $A = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{(1+t)^2}$ et $B = \left(1+t^2\right)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible. ....

Comparaison

Calcul 1.10 — **Règles de comparaison.**

Comparer les fractions suivantes avec le signe « $>$ », « $<$ » ou « $=$ ».

a) $\dfrac{3}{5} \dots \dfrac{5}{9}$ .... b) $\dfrac{12}{11} \dots \dfrac{10}{12}$ ...... c) $\dfrac{125}{25} \dots \dfrac{105}{21}$ ....

Calcul 1.11 — **Produit en croix.**

Les nombres $A = \dfrac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \dfrac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux ? Oui ou non ? ....

Calcul 1.12 — **Produit en croix.**

On pose $A = \dfrac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B = \dfrac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$? ....

Réponses mélangées

$\dfrac{-1}{n(n+1)^2}$		$-\dfrac{ab}{a-b}$	2	3	$\dfrac{12}{11} > \dfrac{10}{12}$	$\dfrac{1}{2}$	247	$\dfrac{n^3+n}{n+1}$	$1\ 000$	$\dfrac{1}{9}$
$2t$	$2\ 022$	$\dfrac{-10}{3}$	$\dfrac{4}{5}$	$3 + \dfrac{5}{x-2}$	$\dfrac{3}{2}n$	$\dfrac{203}{24}$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{3}{5} > \dfrac{5}{9}$	9
$4 + \dfrac{5}{6}$	$A > B$	1	$\dfrac{16}{35}$	2^5	$-2 \times 3^{3k-2}$	Non	$1 + \dfrac{1}{k-1}$	$\dfrac{125}{25} = \dfrac{105}{21}$		

▶ Réponses et corrigés page 45

Fiche de calcul n° 2

002A

Puissances

Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décompostion en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 2.1

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ ....

b) $(10^5)^3$ ....

c) $\dfrac{10^5}{10^3}$ ....

d) $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}$ ....

e) $\dfrac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$ ....

f) $\dfrac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$ ......

Calcul 2.2

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ ....

b) $(5^3)^{-2}$ ....

c) $\dfrac{2^5}{2^{-2}}$ ....

d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ ....

e) $\dfrac{6^5}{2^5}$ ....

f) $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$ ....

Calcul 2.3

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ ....

b) $2^{21} + 2^{22}$ ....

c) $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$ ....

d) $\dfrac{\left(3^2 \cdot (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \cdot 2^3\right)^{-2}}$ ....

Calcul 2.4

Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\dfrac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ ....

b) $\dfrac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ ....

c) $\dfrac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$ ....

d) $\dfrac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$ ....

Calcul 2.5

Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

a) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ ....

b) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4}$ ....

c) $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x}$ ....

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{x}{x+1}$ $\quad 15^4 \quad$ $\dfrac{2x}{x+1}$ $\quad 2^{21} \cdot 3 \quad 10^{15} \quad 11 \quad 5^{-6} \quad 2^{38} \cdot 3^{26}$

$10^2 \quad 10^8 \quad 10^{-2} \quad 2^{-4} \cdot 3^{-1} \quad 2^6 \cdot 5 \quad 3^5 \quad (-7)^{-2}$

$\dfrac{2}{x-2}$ $\quad 10^4 \quad 8 \quad 2^7 \quad 10^{-8} \quad 3^{10} \quad$ $\dfrac{1}{x-2}$ $\quad 3^{28} \quad 2$

► Réponses et corrigés page 48

Fiche de calcul n° 3

003A

Calcul littéral

Prérequis
Les identités remarquables.

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

a) $\left(2x - \dfrac{1}{2}\right)^3$ ....

b) $(x-1)^3\big(x^2+x+1\big)$ ....

c) $(x+1)^2(x-1)\big(x^2-x+1\big)$ ....

d) $(x+1)^2(x-1)\big(x^2+x+1\big)$ ....

e) $(x-1)^2(x+1)\big(x^2+x+1\big)$ ....

f) $\big(x^2+x+1\big)\big(x^2-x+1\big)$ ....

Calcul 3.2

Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x.

a) $(x-2)^2\big(-x^2+3x-1\big)-(2x-1)(x^3+2)$ ....

b) $(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)$ ....

c) $\Big((x+1)^2(x-1)\big(x^2-x+1\big)+1\Big)x-x^6-x^5+2$ ....

d) $(x+1)(x-1)^2-2\big(x^2+x+1\big)$ ....

e) $\Big(x^2+\sqrt{2}x+1\Big)\Big(1-\sqrt{2}x+x^2\Big)$ ....

f) $\big(x^2+x+1\big)^2$ ....

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.

Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$ ....

b) $25-(10x+3)^2$ ....

c) $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$ ....

d) $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$ ....

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.

Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de ax^2+bx+c est $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ (où $a\neq 0$).

a) x^2-2x+1 ....

b) x^2+4x+4 ....

c) x^2+3x+2 ....

d) $3x^2+7x+1$ ....

e) $2x^2+3x-28$ ....

f) $-5x^2+6x-1$ ....

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x+y)^2-z^2$ ....

b) $x^2+6xy+9y^2-169x^2$ ....

c) $xy+x+y+1$ ....

d) $xy-x-y+1$ ....

e) $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y$ ..

f) $y^2\left(a^2+b^2\right)+16x^4\left(-a^2-b^2\right)$ ..

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) x^4-1 ....

b) $\left(-9x^2+24\right)\left(8x^2+8\right)+64x^4-64$ ....

c) x^4+x^2+1 ....

d) $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ ....

e) $(ap+bq+cr+ds)^2+(aq-bp-cs+dr)^2+(ar+bs-cp-dq)^2+(as-br+cq-dp)^2$.

Réponses mélangées

$1+2x+3x^2+2x^3+x^4$ $\quad$ $\left(a^2+b^2\right)\left(y-4x^2\right)\left(y+4x^2\right)$ $\quad$ $(x+1)(x+2)$

$2+x^3-x^4-x^5$ $\quad$ $x^5-x^3-x^2+1$ $\quad$ $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

$2\left(x+\dfrac{3-\sqrt{233}}{4}\right)\left(x+\dfrac{3+\sqrt{233}}{4}\right)$ $\quad$ $2(3x-4)(10x+3)$ $\quad$ $1+x^4$ $\quad$ $(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$

$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(p^2+q^2+r^2+s^2\right)$ $\quad$ $(x+y-z)(x+y+z)$ $\quad$ $4(5x+4)(-5x+1)$

$-1-3x-3x^2+x^3$ $\quad$ x^4+x^2+1 $\quad$ $3(14x+3y)(-4x+y)$ $\quad$ $(x+1)(y+1)$

$x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ $\quad$ $(x-1)^2$ $\quad$ $(x+y)(x+1)^2$ $\quad$ $-6(6x+7)$

$8x^3-6x^2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{8}$ $\quad$ $-5(x-1)\left(x-\dfrac{1}{5}\right)$ $\quad$ $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$ $\quad$ $(x-1)(y-1)$ $\quad$ $(x+2)^2$

$-2+12x-17x^2+8x^3-3x^4$ $\quad$ $x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$ $\quad$ $x^5-x^3+x^2-1$ $\quad$ $-28+21x$

$-8\left(x^2+1\right)(x-4)(x+4)$ $\quad$ $3\left(x+\dfrac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\dfrac{7+\sqrt{37}}{6}\right)$ $\quad$ $-8(x+1)(x+16)$

► Réponses et corrigés page 49

Fiche de calcul n° 4

Racines carrées

Prérequis
Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.

Simplifier les expressions suivantes en simplifiant les symboles $\sqrt{\cdot}$ qui peuvent l'être (et en prenant à ne pas se tromper sur les signes).

a) $\sqrt{(-5)^2}$ ....

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$ ....

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ ....

d) $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$ ....

e) $\sqrt{(3-\pi)^2}$ ....

f) $\sqrt{(3-a)^2}$ ....

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.

Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$ ....

b) $(2+\sqrt{5})^2$ ....

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ....

d) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ ....

e) $(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2$ ....

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ ....

g) $\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ ....

h) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ ....

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3

Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ....

c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ....

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

f) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ ....

g) $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

h) $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$ ....

Calcul 4.4

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

Calculs variés

Calcul 4.5 — Avec une variable.

On considère la fonction f qui à $x>1$ associe $f(x)=\sqrt{x-1}$.

Pour tout $x>1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$ ....

b) $\dfrac{f(x+2)-f(x)}{f(x+2)+f(x)}$ ....

c) $\sqrt{x+2f(x)}$ ....

d) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ ....

e) $f(x)+4f''(x)$ ....

f) $\dfrac{f(x)}{f''(x)}$ ....

Calcul 4.6 — Mettre au carré.

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$ ....

b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

Calcul 4.7 — Méli-mélo.

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ ....

b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

c) $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$ ....

d) $3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln 3}$ ....

e) $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ ....

f) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ....

Calcul 4.8

On note $A=\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}$. Simplifier A

On commencera par exprimer A^3 en fonction de A. ....

Réponses mélangées

$12\sqrt{7}$ $\quad -4(x-1)^2$ $\quad -(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ $\quad 9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}$ $\quad 20$ $\quad -\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{2}$ $\quad 1+\sqrt{5}$ $\quad 2\sqrt{2}$ $\quad \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ $\quad |3-a|$ $\quad 50-25\sqrt{3}$ $\quad 1+\sqrt{x-1}$

$\sqrt{3}-1$ $\quad 3+\sqrt{2}$ $\quad 1+\sqrt{2}$ $\quad 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$ $\quad 5$ $\quad \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}$

$\dfrac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}$ $\quad \sqrt{3}$ $\quad \sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2$ $\quad 1$ $\quad 2\sqrt{2}$ $\quad 9+4\sqrt{5}$

$\ln(1+\sqrt{2})$ $\quad 1+\sqrt{3}$ $\quad -\sqrt{3}+2$ $\quad \pi-3$ $\quad 12$ $\quad \sqrt{7}-2$ $\quad 3-2\sqrt{2}$

$1+\sqrt{2}$ $\quad -11+5\sqrt{5}$ $\quad x-\sqrt{x^2-1}$ $\quad 10$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$ $\quad 1-\sqrt{10}+\sqrt{15}$

► Réponses et corrigés page 51

Expressions algébriques

Prérequis
Identités remarquables.

Équations polynomiales

Calcul 5.1 — Cubique.

Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

a) $(a+2)^3$ ……

b) $a^5 - a^6$ ……

c) a^{12} ……

d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2}$ ……

Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.

Soit i un nombre tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $x + \mathrm{i}y$ où x, y sont deux réels.

a) $(3+\mathrm{i})^2$ ……

b) $(3-\mathrm{i})^2$ ……

c) $(3-\mathrm{i})^3$ ……

d) $(3-2\mathrm{i})^3$ ……

Calcul 5.3

Même exercice.

a) $(4-5\mathrm{i})(6+3\mathrm{i})$ ……

b) $(2+3\mathrm{i})^3(2-3\mathrm{i})^3$ ……

c) $\left(-4+\mathrm{i}\sqrt{5}\right)^3$ ……

d) $\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ……

Calcul 5.4 — Puissance cinquième.

Soit a un nombre distinct de 1 tel que $a^5 = 1$. Calculer les nombres suivants :

a) $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$ ……

b) $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$ ……

c) $\displaystyle\prod_{k=0}^{1234} a^k$ ……

d) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$ ……

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} a^k$ ……

f) $\displaystyle\prod_{k=0}^{4} \left(2 - a^k\right)$ ……

Expressions symétriques

Calcul 5.5 — Inverse.

Soit x un réel non nul. On pose $a = x - \dfrac{1}{x}$. Exprimer les quantités suivantes en fonction de a uniquement.

a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ ....

b) $x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ ....

c) $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$ ....

Calcul 5.6 — Trois variables.

Soient x, y, z trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \qquad b = xy + yz + zx \qquad \text{et} \qquad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de a, b, c uniquement.

a) $x^2 + y^2 + z^2$ ....

b) $x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y)$ ....

c) $x^3 + y^3 + z^3$ ....

d) $(x+y)(y+z)(z+x)$ ....

e) $x^2yz + y^2zx + z^2xy$ ....

f) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ ....

Calcul 5.7

Même exercice.

a) $x^3(y+z) + y^3(z+x) + z^3(x+y)$ ....

b) $x^4 + y^4 + z^4$ ....

c) $\dfrac{x}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z}{(z-x)(z-y)}$ ....

d) $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ ....

e) $\dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^3}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z^3}{(z-x)(z-y)}$ ....

Réponses mélangées

$-4 + 43\mathrm{i}\sqrt{5}$ $\quad a^4 + 4a^2 + 2$ $\quad ab - c$ $\quad -1$ $\quad -9 - 46\mathrm{i}$ $\quad a^3 + 3a$ $\quad 7a^2 + 12a + 7$

$39 - 18\mathrm{i}$ $\quad 18 - 26\mathrm{i}$ $\quad 8 - 6\mathrm{i}$ $\quad a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2$ $\quad a^2 + 2$ $\quad 3$ $\quad 1$

$8 + 6\mathrm{i}$ $\quad ac$ $\quad 1$ $\quad 0$ $\quad 31$ $\quad a$ $\quad a^2 - 1$ $\quad 1$ $\quad 2197$ $\quad a^2b - ac - 2b^2$

$-a^2 + 1$ $\quad -2ac + b^2$ $\quad ab - 3c$ $\quad 0$ $\quad a^2 - 2b$ $\quad 4a^2 - a - 3$ $\quad 1$ $\quad a^3 - 3ab + 3c$

▶ Réponses et corrigés page 53

Équations du second degré

Prérequis
Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

Recherche de racines

Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.

Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi* $0, 1, -1, 2, -2$ *ainsi éventuellement que* 3 *et* -3.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ ....

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ ....

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ ....

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ....

e) $x^2 - 5x = 0$ ....

f) $2x^2 + 3x = 0$ ....

g) $2x^2 + 3 = 0$ ....

h) $x^2 + 4x - 5 = 0$ ....

i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$ ....

j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$ ....

Calcul 6.2 — Somme et produit.

Résoudre mentalement les équations suivantes.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$ ....

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ ....

c) $x^2 + 18x + 77 = 0$ ....

d) $x^2 - 8x - 33 = 0$ ....

e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ ....

f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ....

Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.

Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine ....

b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine ....

c) $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine ....

d) $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine ....

Calcul 6.4 — **Racine évidente.**

Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête.

a) $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ ....

b) $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ ....

c) $(x+a)(x+b)=(m+a)(m+b)$ ....

d) $(b-c)x^2+(c-a)mx+(a-b)m^2=0$ ....

e) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{x}=\dfrac{m}{a}+\dfrac{b}{m}$ ....

f) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ ....

Recherche d'équations

Calcul 6.5 — **À la recherche de l'équation.**

En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

a) 9 et 13 ....

b) -11 et 17 ....

c) $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ ....

d) $m+\sqrt{m^2-3}$ et $m-\sqrt{m^2-3}$ ....

e) $m+3$ et $\dfrac{2m-5}{2}$ ....

f) $\dfrac{m+1}{m}$ et $\dfrac{m-2}{m}$ ....

Calcul 6.6 — **Avec le discriminant.**

Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

a) $x^2-(2m+3)x+m^2=0$ ....

b) $(m+2)x^2-2(m-1)x+4=0$ ....

c) $(m+3)x^2+2(3m+1)x+(m+3)=0$ ....

Factorisations et signe

Calcul 6.7 — Factorisation à vue.

Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x.

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x+2)(ax+b)$ ....

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x-1)(ax+b)$ ....

c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x-3)(ax+b)$ ....

d) $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{11}{2}x - 40 = (x-5)(ax+b)$ ....

e) $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x-\sqrt{7})(ax+b)$ ....

Calcul 6.8 — Signe d'un trinôme.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$ ....

b) $-x^2 + 2x + 15$ ....

c) $(x+1)(3x-2)$ ....

d) $\dfrac{x-4}{2x+1}$ ....

Réponses mélangées

$2/3$ $\quad$ m donc ab/m $\quad$ m donc $-(m+a+b)$ $\quad$ $a=-3$ et $b=5$ $\quad$ $-7, -11$

$x^2 - 22x + 117 = 0$ $\quad$ $]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[$ $\quad$ 0, donc 5 $\quad$ $m=1$ et $x=-1$ ou $m=-1$ et $x=1$

$[-3, 5]$ $\quad$ m donc $m(a-b)/(b-c)$ $\quad$ $a=1/2$ et $b=8$ $\quad$ $-3, 11$ $\quad$ 1 donc $c(a-b)/(a(b-c))$

a, b $\quad$ $]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$ $\quad$ $-1/m$ $\quad$ $a+b$ puis $2ab/(a+b)$. $\quad$ 1 donc -5

$6, 7$ $\quad$ 1 donc $(a-b)/(b-c)$ $\quad$ $]-\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[$ $\quad$ $2m/(m+3)$

$-2/7$ $\quad$ $a=1$ et $b=3\sqrt{7}$ $\quad$ $m^2x^2 + (m-2m^2)x + (m^2-m-2) = 0$

$a=-2$ et $b=1$ $\quad$ $2, 3$ $\quad$ $a-b, a+b$ $\quad$ $3, 3$ $\quad$ $a=2$ et $b=3$ $\quad$ 1 donc $8/3$

$\varnothing$ $\quad$ $m=-3/4$ et $x=3/4$ $\quad$ $-3, -5$ $\quad$ $2x^2 - (4m+1)x + (2m^2+m-15) = 0$

-1 donc $-19/5$ $\quad$ $x^2 - 4x + 1 = 0$ $\quad$ $-1/3, -1/3$ $\quad$ $x^2 - 2mx + 3 = 0$

0, donc $-3/2$ $\quad$ $x^2 - 6x - 187 = 0$ $\quad$ $2, -6$ $\quad$ $m=-1$ et $x=-2$, ou $m=7$ et $x=2/3$

► Réponses et corrigés page 56

Fiche de calcul n° 7

Exponentielle et logarithme

Prérequis
Exponentielle, logarithme.

Logarithmes

Calcul 7.1

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln 16$ ....

b) $\ln 512$ ....

c) $\ln 0{,}125$ ....

d) $\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{8}$ ....

e) $\ln 72 - 2\ln 3$ ....

f) $\ln 36$ ....

Calcul 7.2

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln\dfrac{1}{12}$ ....

b) $\ln(2{,}25)$ ....

c) $\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0{,}875)$ ....

d) $\ln 500$ ....

e) $\ln\dfrac{16}{25}$ ....

f) $\ln(6{,}25)$ ....

Calcul 7.3

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

$\ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \cdots + \ln\dfrac{98}{99} + \ln\dfrac{99}{100}$ ....

Calcul 7.4 — Logarithme et radicaux.

a) On pose $\alpha = \dfrac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1)$. Calculer $(1+\sqrt{2})^2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

En déduire une écriture simplifiée de α en fonction de $\ln(\sqrt{2}-1)$. ....

b) Calculer β sachant que $\ln\beta = \ln(7+5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2}+1) + 7\ln(\sqrt{2}-1)$ ....

c) Simplifier $\gamma = \ln\Big((2+\sqrt{3})^{20}\Big) + \ln\Big((2-\sqrt{3})^{20}\Big)$ ....

d) Simplifier $\delta = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. ....

Exponentielles

Calcul 7.5

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $e^{3\ln 2}$ ....

b) $\ln(\sqrt{e})$ ....

c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$ ....

d) $e^{-2\ln 3}$ ....

e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$ ....

f) $e^{\ln 3 - \ln 2}$ ....

Calcul 7.6

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-e^{-\ln\frac{1}{2}}$ ....

b) $e^{-\ln\ln 2}$ ....

c) $\ln\left(\dfrac{1}{e^{17}}\right)$ ....

d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$ ....

e) $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln e^2)}\right)$ ....

f) $\exp\left(-\dfrac{1}{3}\ln(e^{-3})\right)$ ....

Études de fonctions

Calcul 7.7 — Parité.

Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \longmapsto \ln\dfrac{2021+x}{2021-x}$ ....

b) $f_2 : x \longmapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ ....

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ ....

d) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ ....

Calcul 7.8 — Étude d'une fonction.

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. ....

b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b) = \dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$. ....

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$. ....

d) Déterminer la limite de f en $-\infty$. ....

Calcul 7.9

On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x). \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

a) $f(2\mathrm{e}^x - 1)$ ....

b) $\mathrm{e}^{x - \frac{1}{2} f(x)}$ ....

c) $\dfrac{1}{2} f(x^2 - 2x)$ ....

d) $x f'(x) - 1$ ....

e) $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ ....

Équations, inéquations

Calcul 7.10

Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x).

a) $\mathrm{e}^{3x-5} \geqslant 12$ ....

b) $1 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2+x}$ ....

c) $\mathrm{e}^{1+\ln x} \geqslant 2$ ....

d) $\mathrm{e}^{-6x} \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}$ ....

e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ ....

f) $\ln(-x-5) = \ln \dfrac{x-61}{x+7}$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+x}}$	$\dfrac{1}{2}\ln 2$	-1	$-3\ln 2$	8	$2\ln 5 - 2\ln 2$	$x \geqslant \dfrac{\ln 12 + 5}{3}$		
$3\ln 5 + 2\ln 2$	$2\ln 3 - 2\ln 2$	impaire	$x \geqslant \dfrac{2}{e}$	$-2\ln 5 + 4\ln 2$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{3}{2}$		
$\ln 3 + 11\ln 2$	1	$x + \ln 2$	$\dfrac{-13 - \sqrt{273}}{2}$	impaire	-1	0	$x \geqslant -\dfrac{1}{12}$	
$9\ln 2$	$\dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$	$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{1+x}$	$3\ln 2$	-17	$(1+x)^x$	$2\ln 2 + 2\ln 3$	
$\dfrac{1}{9}$	-2	$-\ln 3 - 2\ln 2$	$4\ln 2$	$x \in [0,1]$	impaire	impaire	e	$\varnothing$
$\ln\lvert x-1\rvert$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{\ln 2}$	0	ok	$17 + 12\sqrt{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	$-2\ln 2 - 2\ln 5$	1

► Réponses et corrigés page 58

Fiche de calcul n° 8

Trigonométrie

Prérequis
Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos.
Formules d'addition et de duplication. Fonction tangente.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.1

Simplifier :

a) $\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{3\pi}{4} + \cos\dfrac{5\pi}{4} + \cos\dfrac{7\pi}{4}$.

b) $\sin\dfrac{5\pi}{6} + \sin\dfrac{7\pi}{6}$ ....

c) $\tan\dfrac{2\pi}{3} + \tan\dfrac{3\pi}{4} + \tan\dfrac{5\pi}{6} + \tan\dfrac{7\pi}{6}$

d) $\cos^2\dfrac{4\pi}{3} - \sin^2\dfrac{4\pi}{3}$ ....

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.2

Simplifier :

a) $\sin(\pi - x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ ....

b) $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

c) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ ....

d) $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ ....

Formules d'addition

Calcul 8.3

Calculer les quantités suivantes.

a) $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ (on a $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{12}$) ....

b) $\cos\dfrac{\pi}{12}$ ....

c) $\sin\dfrac{\pi}{12}$ ....

d) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ ....

Calcul 8.4

a) Simplifier : $\sin(4x)\cos(5x) - \sin(5x)\cos(4x)$ ....

b) Simplifier : $\dfrac{\sin 2x}{\sin x} - \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$ (pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$) ....

c) Simplifier : $\cos x + \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right)$ ....

d) Expliciter $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$ ....

Formules de duplication

Calcul 8.5

En remarquant qu'on a $\dfrac{\pi}{4} = 2 \times \dfrac{\pi}{8}$, calculer :

a) $\cos \dfrac{\pi}{8}$ ....

b) $\sin \dfrac{\pi}{8}$ ....

Calcul 8.6

a) Simplifier : $\dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$ (avec $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$) ....

b) Simplifier : $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$ (pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$) ....

c) Expliciter $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$ ....

Équations trigonométriques

Calcul 8.7

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = \dfrac{1}{2}$ ....

b) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ....

c) $\sin x = \cos \dfrac{2\pi}{3}$ ......

d) $\tan x = -1$ ....

e) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$ ....

f) $|\tan x| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ......

g) $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ......

h) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

i) $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{7}$ ....

j) $\sin x = \cos \dfrac{\pi}{7}$ ....

Inéquations trigonométriques

Calcul 8.8

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

a) $\cos x \geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ....

b) $\cos x \leqslant \cos \dfrac{\pi}{3}$ ....

c) $\sin x \leqslant \dfrac{1}{2}$ ....

d) $|\sin x| \leqslant \dfrac{1}{2}$ ....

e) $\tan x \geqslant 1$ ....

f) $|\tan x| \geqslant 1$ ....

g) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ ......

h) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ .....

Réponses mélangées

$\left[-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$ $\quad\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ $\quad\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}$ $\quad\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$ $\quad-1-\sqrt{3}$ $\quad 2\cos x$ $\quad\frac{1}{\cos x}$ $\quad\left[-\pi,-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

$\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad\left\{\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$ $\quad\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{6},2\pi\right]$

$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ $\quad\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$ $\quad 0$ $\quad\left\{\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad\left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}$

$\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{11\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad\left\{\frac{5\pi}{14}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{9\pi}{14}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

$-\sin x$ $\quad\left[0,\frac{3\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{8},\frac{11\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{15\pi}{8},2\pi\right]$ $\quad\left[-\pi,-\frac{5\pi}{8}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{8},\pi\right]$

$\left\{\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12},\frac{13\pi}{12},\frac{23\pi}{12}\right\}$ $\quad-\sin x$ $\quad\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right\}$ $\quad\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ $\quad\left\{\frac{5\pi}{14},\frac{9\pi}{14}\right\}$

$\left\{\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\quad\left\{\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},2\pi\right]$

$8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$ $\quad\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right\}$ $\quad\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ $\quad 4\cos^3 x-3\cos x$

$\left\{-\frac{11\pi}{12},-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right\}$ $\quad\left\{\frac{-2\pi}{3},\frac{-\pi}{3}\right\}$ $\quad-2\cos x$ $\quad\left\{\frac{5\pi}{14},\frac{9\pi}{14}\right\}$ $\quad\left\{-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$

$\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$ $\quad\left\{-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$ $\quad\left\{\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{11\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\left\{\frac{\pi}{7}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{7}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$ $\quad 2$ $\quad\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[$

$\left\{\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$ $\quad\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\quad 0$ $\quad\left\{\frac{\pi}{7},\frac{13\pi}{7}\right\}$ $\quad\left\{-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right\}$ $\quad\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad-\frac{1}{2}$

$\left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ $\quad\left\{\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$ $\quad\left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$ $\quad\tan x$

$\left\{\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$ $\quad\left[-\pi,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$ $\quad\left\{-\frac{\pi}{7},\frac{\pi}{7}\right\}$ $\quad\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad 0$ $\quad 0$ $\quad\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\quad\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right]$

► Réponses et corrigés page 60

Dérivation

Prérequis
Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 9.1 — Avec des produits.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6)\exp(2x)$. ....

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x)\ln(x - 2)$ ....

Calcul 9.2 — Avec des puissances.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2\cos(x))^2$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3\cos(x) - \sin(x))^3$. ....

Calcul 9.3 — Avec des fonctions composées.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. ....

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x)\exp(x^2 + x)$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3\sin(2x))$. ....

Calcul 9.4 — Avec des fonctions composées — *bis*.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)$. ....

c) $x \in]0,\pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$. ....

d) $x \in]0,+\infty[$ et $f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$. ....

Calcul 9.5 — Avec des quotients.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2\sin(x)+3}$. ....

b) $x \in]0,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x+2}$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\cos(2x+1)}{x^2+1}$. ....

d) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{\ln(x)}$. ....

Opérations et fonctions composées

Calcul 9.6

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. ....

b) $x \in]-3,3[$ et $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$. ....

c) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$ ....

d) $x \in]0,\pi[$ et $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$. ....

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 9.7

Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus 3, -2$ et $f(x) = \dfrac{1}{3-x} + \dfrac{1}{2+x}$. ....

b) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$ ....

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \dfrac{x+2}{x-1}$. ....

d) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$. ....

e) $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$. ....

Réponses mélangées

$\dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$ $\quad$ $\dfrac{1}{x\ln(x)}$ $\quad$ $\dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$ $\quad$ $\dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$

$(6x-1)\ln(x-2) + \dfrac{3x^2-x}{x-2}$ $\quad$ $\dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$ $\quad$ $\dfrac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2}\sin\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)$ $\quad$ $\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$

$\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}$ $\quad$ $-3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x))$ $\quad$ $5x^4-6x^2+4x-15$

$6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$ $\quad$ $\dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$ $\quad$ $5(x^2-5x)^4(2x-5)$

$-2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$ $\quad$ $\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ $\dfrac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$ $\quad$ $\dfrac{x^2}{(x+1)^2}$

$\dfrac{(4x+3)\ln(x)-2x-3}{(\ln(x))^2}$ $\quad$ $\dfrac{2}{x+1}\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad$ $\dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$

$2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad$ $6x^2+2x-11$ $\quad$ $(2x^2-2x+10)\exp(2x)$ $\quad$ $8\cos^2(x)-6\cos(x)\sin(x)-4$

$4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)$ $\quad$ $\dfrac{2x}{x^2+1}$ $\quad$ $(-2x^2+3x+1)\exp(x^2+x)$ $\quad$ $\dfrac{1}{1-x^2}$

► Réponses et corrigés page 63

Fiche de calcul n° 10

Primitives

Prérequis
Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 10.1

Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{t+1}$ ....

b) $\dfrac{3}{(t+2)^2}$ ....

c) $\dfrac{3}{(t+2)^3}$ ....

d) $\sin(4t)$ ....

Calcul 10.2

Même exercice.

a) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$ ....

b) e^{2t+1} ....

c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$ ....

d) $\dfrac{1}{1+9t^2}$ ....

Utilisation des formulaires

Calcul 10.3 — Dérivée d'une fonction composée.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\dfrac{2t^2}{1+t^3}$ ....

b) $t\sqrt{1+2t^2}$ ....

c) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

d) $\dfrac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$ ....

e) $\dfrac{t}{1+3t^2}$ ....

f) $\dfrac{12t}{(1+3t^2)^3}$ ....

Calcul 10.4 — Dérivée d'une fonction composée – *bis*.

Même exercice.

a) $\dfrac{\ln^3 t}{t}$ ....

b) $\dfrac{1}{t\sqrt{\ln t}}$ ....

c) $\dfrac{8e^{2t}}{(3-e^{2t})^3}$ ....

d) $\dfrac{1}{t^2\sqrt{t}}$ ....

e) $\dfrac{e^t + e^{-t}}{1 - e^{-t} + e^t}$ ....

f) $\dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$ ....

Calcul 10.5 — Trigonométrie.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\cos^2 t \sin t$ ……

b) $\cos(t) e^{\sin t}$ ……

c) $\tan t$ ……

d) $\dfrac{\cos t}{1 - \sin t}$ ……

e) $\dfrac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ ……

f) $\dfrac{\cos(\pi \ln t)}{t}$ ……

g) $\tan^2 t$ ……

h) $\tan^3 t$ ……

i) $\dfrac{\tan^3 t}{\cos^2 t}$ ……

j) $\dfrac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}}$ ……

k) $\dfrac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t}$ ……

l) $\dfrac{\cos t}{(1 - \sin t)^3}$ ……

m) $\dfrac{1}{1 + 4t^2}$ ……

n) $\dfrac{e^t}{1 + e^{2t}}$ ……

o) $\dfrac{\mathrm{Arcsin}(t)}{\sqrt{1 - t^2}}$ ……

p) $\dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{Arcsin}(t)}$

Calcul 10.6 — Trigonométrie – *bis*.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en utilisant d'abord le formulaire de trigonométrie.

a) $\cos^2 t$ ……

b) $\cos(t)\sin(3t)$ ……

c) $\sin^3 t$ ……

d) $\dfrac{\sin(2t)}{1 + \sin^2 t}$ ……

e) $\dfrac{1}{\sin t \cos t}$ ……

f) $\dfrac{1}{\sin^2(t)\cos^2(t)}$ ……

g) $\dfrac{1}{\sin(4t)}$ ……

Calcul 10.7 — Fractions rationnelles.

Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

a) $\dfrac{t^2 + t + 1}{t^2}$ ……

b) $\dfrac{t^2 + 1}{t^3}$ ……

c) $\dfrac{1 - t^6}{1 - t^2}$ ……

d) $\dfrac{t^3 + 1}{t + 1}$ ……

e) $\dfrac{t - 1}{t + 1}$ ……

f) $\dfrac{t^3}{t + 1}$ ……

g) $\dfrac{t - 1}{t^2 + 1}$ ……

h) $\dfrac{t}{(t + 1)^2}$ ……

Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

Calcul 10.8

Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

a) $t^2 - 2t + 5$ ……

b) $\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{t}$ ……

c) $\sqrt{t} - \dfrac{1}{t^3}$ ……

d) $\dfrac{1}{t^4} + \dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ ……

e) $e^{2t} + e^{-3t}$ ……

f) e^{3t-2} ……

g) $\dfrac{t^2}{t^3 - 1}$ ……

h) $\dfrac{3t - 1}{t^2 + 1}$ ……

i) $\sin(t)\cos^2(t)$ …

j) $\sinh(t)\cosh(t)$ ..

k) $\dfrac{1}{t^2}\sin\dfrac{1}{t}$ …….

l) $\dfrac{e^t}{2+e^t}$ ……….

m) $\dfrac{\sin t}{2+3\cos t}$ ……

n) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ……..

o) $\dfrac{\sin 2t}{1+\cos^2 t}$ ……

p) te^{-t^2} ……….

q) $\dfrac{1-\ln t}{t}$ ……..

r) $\dfrac{1}{t\ln t}$ ……….

s) $\dfrac{\sin(\ln t)}{t}$ …….

t) $\dfrac{e^t}{1+e^{2t}}$ ………

Calcul 10.9 — ***Bis repetita.***

Reprendre l'exercice précédent en commençant par intégrer puis en dérivant et factorisant.

Réponses mélangées

$t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}$ $\quad -\frac{4}{t^5}-\frac{3}{2}\frac{1}{t^{5/2}}$ puis $-\frac{1}{3}\frac{1}{t^3}-\frac{2}{\sqrt{t}}$ $\quad -\frac{3}{t+2}$ $\quad \frac{1}{2}e^{2t+1}$ $\quad 2\sqrt{\tan t}$

$2\frac{3\cos^2 t-1}{(1+\cos^2 t)^2}$ puis $-\ln(1+\cos^2(t))$ $\quad \frac{1}{4}\ln^4 t$ $\quad t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$ $\quad \frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{3}{t^4}$ puis $\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2t^2}$

$-\text{cotan}t+\tan t$ $\quad -\frac{1}{t^2}\left(\frac{2}{t}+1\right)$ puis $-\frac{1}{t}+\ln|t|$ $\quad -\frac{e^t(e^{2t}-1)}{(1+e^{2t})^2})$ puis $\text{Arctan}(e^t)$

$-\ln|1-\sin t|$ $\quad t+\ln|t|-\frac{1}{t}$ $\quad t-2\ln|t+1|$ $\quad 2e^{2t}-3e^{-3t}$ puis $\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-3t}$

$\frac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}$ $\quad \ln|t+1|+\frac{1}{t+1}$ $\quad \ln|t+1|$ $\quad -\frac{1+\ln t}{t^2\ln^2 t}$ puis $\ln|\ln t|$ $\quad -\frac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}$ $\quad -\frac{\cos(4t)}{4}$

$-\frac{2t\sin\frac{1}{t}+\cos\frac{1}{t}}{t^4}$ puis $\cos\frac{1}{t}$ $\quad \ln|t|-\frac{1}{2t^2}$ $\quad \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\sin t)^2}$ $\quad \frac{2\cos t+3}{(2+3\cos t)^2}$ puis $-\frac{1}{3}\ln|2+3\cos t|$

$\frac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}$ $\quad -\cos t+\frac{1}{3}\cos^3 t$ $\quad \cos t(3\cos^2 t-2)$ puis $-\frac{1}{3}\cos^3 t$ $\quad \frac{\ln t-2}{t^2}$ puis $\ln t-\frac{1}{2}\ln^2 t$

$\frac{1}{3}\text{Arctan}(3t)$ $\quad \frac{2e^t}{(2+e^t)^2}$ puis $\ln(2+e^t)$ $\quad -\frac{3t^2-2t-3}{(t^2+1)^2}$ puis $\frac{3}{2}\ln(t^2+1)-\text{Arctan}(t)$

$2(t-1)$ puis $\frac{1}{3}t^3-t^2+5t$ $\quad -2\cos\sqrt{t}$ $\quad -\sqrt{1-t^2}$ $\quad \frac{2}{3}\ln|1+t^3|$ $\quad \frac{1}{2}\ln(1+t^2)-\text{Arctan}(t)$

$\frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}$ puis $-\sqrt{1-t^2}$ $\quad \frac{\cos\ln t-\sin\ln t}{t^2}$ puis $-\cos(\ln t)$ $\quad (1-2t^2)e^{-t^2}$ puis $-\frac{1}{2}e^{-t^2}$

$\frac{1}{6}\ln(1+3t^2)$ $\quad \frac{1}{4}\ln|\tan 2t|$ $\quad \frac{2}{(3-e^{2t})^2}$ $\quad \frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}$ $\quad -\ln|\cos t|$ $\quad \ln|\tan t|$

$\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}$ $\quad \frac{1}{\pi}\sin(\pi\ln t)$ $\quad \sinh(t)^2+\cosh^2(t)$ puis $\frac{1}{2}\sinh^2(t)$ $\quad \ln(1+\sin^2 t)$

$\ln|\text{Arcsin}(t)|$ $\quad -\frac{1}{(1+3t^2)^2}$ $\quad \frac{1}{4}\tan^4 t$ $\quad \ln|1-e^{-t}+e^t|$ $\quad -\frac{\cos(4t)}{8}-\frac{\cos(2t)}{4}$

$e^{\sin t}$ $\quad \frac{1}{2}\tan^2 t+\ln|\cos t|$ $\quad 2\sqrt{\ln t}$ $\quad 3e^{3t-2}$ puis $\frac{1}{3}e^{3t-2}$ $\quad -\frac{1}{\tan t}$ $\quad \frac{1}{2}(\text{Arcsin}(t))^2$

$\tan t-t$ $\quad -e^{\frac{1}{t}}$ $\quad \frac{1}{2}\text{Arcsin}(2t)$ $\quad t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\ln|t+1|$ $\quad \text{Arctan}(e^t)$

$-\frac{1}{3}\cos^3 t$ $\quad -\frac{t(t^3+2)}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}$ puis $\frac{1}{3}\ln(|t^3-1|)$ $\quad -\frac{3}{2(t+2)^2}$ $\quad \frac{1}{2}\text{Arctan}(2t)$

► Réponses et corrigés page 66

Fiche de calcul n° 11

Calcul d'intégrales

Prérequis
Primitives usuelles, composées simples.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon ordre ».

Calcul 11.1

Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^2 + \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{5}^{-3} |\sin 7x| \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{0}^{-1} \sin x \,\mathrm{d}x$

Calcul 11.2

En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} 7 \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{7}^{-3} -5 \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{0}^{7} 3x \,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{2}^{8} 1 - 2x \,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sin x \,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{-2}^{1} |x| \,\mathrm{d}x$

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, que l'on note $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Calcul 11.3 — Polynômes.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2 \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} 2x - 5 \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{0} x^2 + x + 1 \,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^5 - 5x^3 \,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^5 - x^4 \,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{1}^{-1} x^{100} \,\mathrm{d}x$

Calcul 11.4 — Fonctions usuelles.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

d) $\displaystyle\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$

Calcul 11.5 — De la forme $f(ax+b)$.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \, dx$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} e^{\frac{1}{2}x+1} \, dx$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\pi x+2}$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \, dx$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \, dx$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) dx$ ....

Calcul 11.6 — Fonctions composées.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x-2}{x^2-4x+5} \, dx$ ....

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x^2+1) \, dx$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \tan x \, dx$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^5 \, dx$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^{x^2-1} \, dx$ ....

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+1)^4} \, dx$ ....

Calcul 11.7 — Divers.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1} \, dx$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x+1| \, dx$ ....

c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \max(1, e^x) \, dx$ ....

d) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{3x-2\ln x}{x} \, dx$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x) \, dx$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x \sin x| \, dx$ ....

Calcul 11.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \arcsin x \, dx$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2} \, dx$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{2} 10^x \, dx$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \mathrm{ch}(x) \, dx$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{x} \, dx$ ....

f) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} \, dx$ ....

Réponses mélangées

$\frac{99}{\ln 10}$	$\frac{7}{48}$	Positif	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{2}$	50	$-\ln 3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$	
-2	$-\frac{2}{101}$	0	$\frac{e-\frac{1}{e}}{2}$	14	0	0	18	$\frac{8}{3}$	0	1
$3e-4$	8	Positif	-54	$\frac{1}{2}-\frac{1}{e+1}$	$-\frac{1}{384}$	e^2-e^{-3}	$\frac{2}{3}$		
$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{3}$	$\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$2(e^3-1)$	78	Négatif	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		
$\frac{17}{2}$	$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{147}{2}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{1}{\pi}\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$	0	e^2	6	

► Réponses et corrigés page 69

Intégration par parties

Prérequis
Primitives, dérivées, intégration par parties.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégrales

Calcul 12.1

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 (2t+3)\mathrm{sh}(2t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_1^{\ln 2} t2^t\,\mathrm{d}t$ ....

e) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\,\mathrm{d}t$ ....

f) $\displaystyle\int_1^2 t\ln t\,\mathrm{d}t$ ....

g) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ ....

h) $\displaystyle\int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t$ ....

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t\,\mathrm{d}t$ ....

j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$ ....

k) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ ....

l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t\,\mathrm{d}t$ ....

Primitives

Calcul 12.2

Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

a) $x \longmapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ ....

c) $x \longmapsto \arctan(x)$ ......

d) $x \longmapsto x\mathrm{ch}(x)$ ....

Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

Calcul 12.3 — Calcul d'intégrales.

a) $\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 12.4 — Calcul de primitives.

Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \sin(x)\mathrm{sh}(x)$ ....

b) $x \longmapsto \ln^2 x$ ....

c) $x \longmapsto (x\ln x)^2$ ....

d) $x \longmapsto \mathrm{e}^{\arccos(x)}$ ....

Réponses mélangées

$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{4}{3}$ $\quad \frac{5}{2}\mathrm{ch}(2)-\frac{1}{2}\mathrm{sh}(2)-\frac{3}{2}$ $\quad \begin{cases}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)\end{cases}$

$\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$ $\quad \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1+\ln x}{x}\end{cases}$ $\quad \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2)-\frac{8}{9}\sqrt{2}+\frac{4}{9}$ $\quad \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\end{cases}$

$\frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)}-2\ln(2)-2^{\ln(2)}+2}{(\ln(2))^2}$ $\quad \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}(-\cos(x)\mathrm{sh}(x)+\sin(x)\mathrm{ch}(x))\end{cases}$

1 $\quad \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi^2}{32}$ $\quad \frac{5}{2}-\mathrm{e}^2$ $\quad \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln^2 x-2x\ln x+2x\end{cases}$

$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\mathrm{sh}(x)-\mathrm{ch}(x)\end{cases}$ $\quad 2\ln 2-\frac{3}{4}$ $\quad \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x\end{cases}$

$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\left(\frac{1}{3}\ln^2 x-\frac{2}{9}\ln x+\frac{2}{27}\right)\end{cases}$ $\quad \frac{\pi}{2}-1$ $\quad \ln(2)-2+\frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$ $\quad 4$

► Réponses et corrigés page 73

Systèmes linéaires

Prérequis
Résolution par substitution d'une variable, par combinaisons linéaires de lignes.

Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Calcul 13.1

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$.

a) $\begin{cases} x - 2\,y = 1 \\ 3\,x + 4\,y = 13 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 2\,x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3\,x - 6y = -3 \\ 2\,x + 2\,y = 2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 3\,x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6\,x + 2\,y = 3\sqrt{2} \end{cases}$ ....

Calcul 13.2 — Systèmes avec paramètre.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases}$ ......

Systèmes de 2 équations à 3 inconnues

Calcul 13.3

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases}$ ....

Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

Calcul 13.4

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} a - b - c = -7 \\ 3a + 2b - c = 3 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases}$ ......

d) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$ ......

Calcul 13.5

On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a proposées.

a) $a = 0$ ....

b) $a = -2$ ....

c) $a = 3$ ....

d) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$. ....

Calcul 13.6

On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètres $(a, c) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x - az = c \\ a\,x - y = c \\ a\,y - z = c. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a et c proposées.

a) $a = 2, c = 7$ ....

b) $a = 1, c = 2$ ....

c) $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ....

Calcul 13.7

On propose le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 4x + y + z = \lambda x \\ x + 4y + z = \lambda y \\ x + y + 4z = \lambda z. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de λ proposées.

a) $\lambda = 1$ ....

b) $\lambda = 3$ ....

c) $\lambda = 6$ ....

Réponses mélangées

$\{(x,x,x)\,;\, x \in \mathbb{R}\}$ $\quad (a - 2a^2, a + a^2)$ $\quad \{(-1,4,2)\}$ $\quad \varnothing$ $\quad \left\{(-\frac{2}{7} - z, \frac{-3}{7}, z)\,;\, z \in \mathbb{R}\right\}$ $\quad \varnothing$

$\left\{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\right\}$ $\quad \varnothing$ $\quad \{(5z, 1 - 4z, z)\,;\, z \in \mathbb{R}\}$ $\quad \{(0,0,0)\}$ $\quad \left\{(\frac{1}{13}a + \frac{5}{13}a^2, \frac{2}{13}a - \frac{3}{13}a^2)\right\}$

$\{(5,3,-1)\}$ $\quad (2,-3)$ $\quad \left\{(\frac{13}{6} - \frac{5}{3}z, -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}z, z); z \in \mathbb{R}\right\}$ $\quad \left\{(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$

$\{(1, y, 3 + 2y); y \in \mathbb{R}\}$ $\quad \{(2,-1,3)\}$ $\quad \{(1, 1/2, 1/2)\}$ $\quad \left\{(\frac{a^2 + a - 1}{a^3 - 1}c, \frac{a^2 - a + 1}{a^3 - 1}c, \frac{-a^2 + a + 1}{a^3 - 1}c)\right\}$

$\{(x, y, -x - y)\,;\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ $\quad \{(7,2)\}$ $\quad \{(3,1)\}$ $\quad \left\{(x, \frac{-5}{12} - \frac{3}{2}x, \frac{-25}{24} - \frac{7}{4}x); x \in \mathbb{R}\right\}$

$\{(1 + z, -z, z); z \in \mathbb{R}\}$ $\quad \left\{(1, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2})\right\}$ $\quad \left\{(1 - \frac{a}{4}, \frac{-1}{2} + \frac{3}{8}a)\right\}$

► Réponses et corrigés page 76

Fiche de calcul n° 14

Nombres complexes

Prérequis
Forme algébrique et forme exponentielle.

Pour s'échauffer

Calcul 14.1 — Écriture algébrique.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $(2+6i)(5+i)$ ....

b) $(3-i)(4+i)$ ....

c) $(4-3i)^2$ ....

d) $(1-2i)(1+2i)$ ....

e) $(2-3i)^4$ ....

f) $\dfrac{1}{3-i}$ ....

g) $\dfrac{2-3i}{5+2i}$ ....

h) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ....

Calcul 14.2 — Forme exponentielle.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

a) 12 ....

b) -8 ....

c) $\sqrt{3}i$ ....

d) $-2i$ ....

e) $-2e^{i\frac{3\pi}{5}}$ ....

f) $5-5i$ ....

g) $-5+5i\sqrt{3}$ ....

h) $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{6}}$ ....

Un calcul plus dur

Calcul 14.3 — Une simplification.

On pose $z=\dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$.

a) Calculer $|z|$ ....

b) Mettre z sous forme algébrique ....

c) Calculer z^{2021} ....

Réponses mélangées

$\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad 10e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $\quad 8e^{i\pi}$ $\quad 2e^{i\frac{8\pi}{5}}$ $\quad 12$ $\quad 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$

$5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $\quad 1$ $\quad \dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}i$ $\quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad 5$ $\quad \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$7-24i$ $\quad -119+120i$ $\quad 4+32i$ $\quad 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $\quad \dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}i$ $\quad 13-i$

► Réponses et corrigés page 81

Fiche de calcul n° 15

Sommes et produits

Prérequis

Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.
Fonctions usuelles (racine carrée, logarithme népérien).

Rappel

Si q est un nombre réel, si $m, n \in \mathbb{N}^*$ et si $m \leqslant n$, on a

- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Calculs de sommes simples

Calcul 15.1

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k+n-1)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3}\right)$ ....

Calcul 15.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (4k(k^2+2))$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k}$ ....

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (7^k + 4k - n + 2)$ ....

f) $\displaystyle\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$ ....

Calcul 15.3 — Produits.

Calculer les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tels que $p \geqslant q$.

a) $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} 2$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k} \times k$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=-10}^{10} k$ ....

Avec des changements d'indice

Calcul 15.4

Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n+1-k$ avec $j = n+1-k$. ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ avec $j = n+1-k$. ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ avec $j = k-1$. ....

d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$ avec $j = k-2$. ....

Sommes et produits télescopiques

Calcul 15.5 — Sommes télescopiques.

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ ....

Calcul 15.6 — Produits télescopiques.

Calculer les produits suivants.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-3}$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ ....

À l'aide d'une décomposition en éléments simples

Calcul 15.7

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$ ....

Sommation par paquets

Calcul 15.8

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\min(k,n)$ ....

Sommes doubles

Calcul 15.9

Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j$ ....

b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)^2$ ....

e) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \ln(i^j)$ ....

f) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$ ....

Réponses mélangées

$\frac{n(n+1)}{2}\ln(n!)$ $\quad \frac{n(n^2-1)}{2}$ $\quad \frac{n+1}{2n}$ $\quad 1-4n^2$ $\quad 5^n(n!)^{\frac{3}{2}}$ $\quad \frac{9}{2}(3^{n-2}-1)$

$\frac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}$ $\quad \frac{n(5n+1)}{2}$ $\quad n(n+2)$ $\quad \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\quad 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ $\quad \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$n+1$ $\quad n2^{n+1}+2(1-2^n)$ $\quad 2n^2+n$ $\quad \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$ $\quad (n+1)!-1$

$n(n+1)(n^2+n+4)$ $\quad \frac{n+1}{2n}$ $\quad 1-\frac{1}{n+1}$ $\quad \frac{1}{n}$ $\quad \frac{7(n+1)(n+4)}{2}$ $\quad 2^{q-p+1}$ $\quad 0$

$\frac{n^2(n+1)}{2}$ $\quad (n+3)^3-2^3$ $\quad \ln(n+1)$ $\quad \frac{(n-2)(n-7)}{6}$ $\quad \frac{7}{6}(7^n-1)+n(n+4)$

$\frac{n(n+1)}{2}$ $\quad 0$ $\quad 1-\frac{1}{(n+1)!}$ $\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{n+3}$ $\quad \frac{n(3n+1)}{2}$ $\quad \frac{n(n+3)}{4}$ $\quad \frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}$

► Réponses et corrigés page 83

Coefficients binomiaux

Prérequis
Factorielle. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et de coefficients binomiaux

Calcul 16.1 — Pour s'échauffer.

Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\dfrac{101!}{99!}$

b) $\dfrac{10!}{7!}$

c) $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!}$

d) $\dbinom{6}{2}$

e) $\dbinom{8}{3}$

f) $4 \times \dbinom{7}{4}$

Calcul 16.2 — Pour s'échauffer – *bis*.

Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, de coefficients binomiaux et, le cas échéant, à l'aide de puissances.

a) $6 \times 7 \times 8 \times 9$

b) $\dfrac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$

c) $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$

d) $3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$

Calcul 16.3 — Avec des paramètres.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k < n$.

a) $\dbinom{n}{2}$ (pour $n \geqslant 2$)

b) $\dbinom{n}{3}$ (pour $n \geqslant 3$)

c) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$

d) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$

e) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!}$

f) $\dfrac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \dfrac{n!}{2^{2n}}$

Calcul 16.4 — Avec des paramètres – *bis*.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre a désigne un nombre non nul.

a) $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{2n \times (n+1)!} + \dfrac{1}{2 \times (n+2)!}$

b) $\dfrac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \dfrac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3}$

Autour du binôme de Newton

Calcul 16.5

Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Calcul 16.6

a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton $(1+1)^n + (1-1)^n$ ....

b) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$ ....

Calcul 16.7

En utilisant la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ ......

Calcul 16.8

a) Donner le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$ ....

b) En donner une autre expression en développant le produit $(1+x)^n(1+x)^n$ ....

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$ $\quad \dfrac{n(n-1)}{2}$ $\quad \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ $\quad \dfrac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}$ $\quad n2^{n-1}$ $\quad \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

56 $\quad 140$ $\quad 720$ $\quad 3^n$ $\quad (n+2)(n+1)$ $\quad \dfrac{k+1}{n-k}$ $\quad \dbinom{9}{4}$ $\quad n(n+1)2^{n-2}$

2^{n-1} $\quad 0$ $\quad 2^n$ $\quad \dbinom{2n}{n}$ $\quad 6^n$ $\quad 2^n \times n!$ $\quad 2 \times \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$ $\quad \dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}$ $\quad 15$

$\dfrac{1}{(n+1)!}$ $\quad 12 \times 15^n$ $\quad \dfrac{9!}{5!}$ $\quad \dfrac{1}{30}$ $\quad \dfrac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}$ $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ $\quad 10\ 100$ $\quad \dbinom{2n}{n}$

► Réponses et corrigés page 88

Manipulation des fonctions usuelles

Prérequis
Dérivation, équations du second degré.

Calculs de valeurs

Calcul 17.1 — Fonctions circulaires réciproques.

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ....

b) $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ ....

c) $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ....

d) $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ....

e) $\arctan(1)$ ....

f) $\arccos\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)$ ....

Calcul 17.2 — Valeurs des fonctions hyperboliques.

Calculer les valeurs suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\operatorname{th}(x) = \operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x)$.

a) $\operatorname{ch}(0)$ ....

b) $\operatorname{sh}(0)$ ....

c) $\operatorname{ch}(\ln(2))$ ....

d) $\operatorname{sh}(\ln(3))$ ....

e) $\operatorname{ch}(\ln(2/3))$ ....

f) $\operatorname{th}(\ln(2))$ ....

Calcul 17.3 — Identités de trigonométrie hyperbolique.

Soient x et y des réels.

Calculer en développant soigneusement, et en simplifiant au maximum, les expressions suivantes.

a) $\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y)\operatorname{sh}(x)$ ....

b) $\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$ ....

Résolution d'équations

Calcul 17.4 — Fonctions $x \longmapsto a^x$.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $3^x = \dfrac{9^x}{2}$ ....

b) $4^x = 2 \times 2^x$ ....

c) $2^x = 3 \times 4^x$ ....

d) $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$ ...

Calcul 17.5 — **Fonctions $x \longmapsto a^x$ (plus difficile).**

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

a) $2^x + 4^x = 4$ ....

b) $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$ ....

c) $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$ ....

d) $3^x + 3^{2x} - 1 = 0.$ ....

Calcul 17.6 — **Équations avec les fonctions circulaires réciproques.**

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [-1, 1]$ pour les deux premiers calculs, et $x \in \mathbb{R}$ pour les autres.

a) $\arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$ ....

b) $\cos(\arccos(x)) = 0$ ....

c) $\arccos(\cos(x)) = 0$ ....

d) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{\pi}{3}$ ....

e) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{1}{3}$ ....

f) $\tan(\arctan(x)) = 1$ ....

Calcul 17.7 — **Équations avec des fonctions hyperboliques.**

Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$.

a) $\text{ch}(x) = \sqrt{5}$ ....

b) $\text{sh}(x) = 1$ ....

c) $\text{th}(x) = \dfrac{1}{3}$ ....

d) $\text{ch}(x) \leqslant 4$ ....

e) $\text{sh}(x) \geqslant 3$ ....

f) $\text{th}(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ ....

Dérivation

Calcul 17.8 — **Quelques calculs de dérivées.**

Dériver les fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto 2^x + x^2$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{3^x}{5^x + 1}$ ....

c) $x \longmapsto x^x$ ....

d) $x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$ ....

Calcul 17.9 — Quelques calculs de dérivées – *bis.*

Dériver les fonctions suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{th}(x) = \mathrm{sh}(x)/\mathrm{ch}(x)$.

a) $x \longmapsto \arcsin(x^2)$ .....

b) $x \longmapsto \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x)$ .....

c) $x \longmapsto \arctan(\mathrm{th}(x))$ ..

d) $x \longmapsto \mathrm{sh}(\mathrm{ch}(x))$ ......

Calcul 17.10 — Deux dérivées importantes.

a) $x \longmapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$ ....

b) $x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ....

Calcul 17.11 — Des dérivées plus compliquées.

Dériver les fonctions suivantes. Dans ce qui suit, la fonction F est une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

a) $x \mapsto F(x^x)$ ....

b) $x \mapsto F(\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))})$ ....

c) $x \mapsto \sqrt{1-x^2} + x\arcsin(x)$ ....

d) $x \mapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ ....

Réponses mélangées

1 $\quad$ 1 $\quad$ $\left[\ln(3+\sqrt{10}), +\infty\right[$ $\quad$ $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\ln(3)\right]$ $\quad$ $x \mapsto \dfrac{15^x\ln(3/5) + 3^x\ln(3)}{(5^x+1)^2}$ $\quad$ $\dfrac{5}{4}$

$x \mapsto \dfrac{1-\mathrm{th}^2(x)}{1+\mathrm{th}^2(x)}$ $\quad$ $x \mapsto \arcsin(x)$ $\quad$ $x \mapsto \ln(2)\times 2^x + 2x$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{3}$ $\quad$ $\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$

$\dfrac{\ln(4)}{\ln(20/3)}$ $\quad$ $x \mapsto (\ln(x)+1)x^x$ $\quad$ $x \mapsto \arctan(x)$ $\quad$ 0 $\quad$ 2 $\quad$ $\mathrm{sh}(x+y)$ $\quad$ $\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}$

$x \mapsto 0$ $\quad$ $1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ $\quad$ $\dfrac{4}{3}$ $\quad$ $\{\ln(\sqrt{5}-2); \ln(\sqrt{5}+2)\}$ $\quad$ $x \mapsto (\ln(x)+1)x^x\mathrm{e}^{-x^{2x}}$

$x \mapsto \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)$ $\quad$ $x \mapsto 0$ $\quad$ $\dfrac{13}{12}$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{4}$ $\quad$ 0 $\quad$ $\ln(1+\sqrt{2})$ $\quad$ $x \mapsto 2x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$

$x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2}\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))}}$ $\quad$ $\left\{0; \dfrac{1}{2}\right\}$ $\quad$ $\left\{\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad$ $x \mapsto \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(\mathrm{ch}(x))$

$\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad$ 1 $\quad$ $\dfrac{\pi}{6}$ $\quad$ $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ $\quad$ $x \mapsto \dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos(x)^2}.$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{4}$ $\quad$ $\dfrac{3}{5}$

$\{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{6}$ $\quad$ 1 $\quad$ $[-\ln(4+\sqrt{15}), \ln(4+\sqrt{15})]$ $\quad$ $\mathrm{ch}(x+y)$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}\ln(2)$ $\quad$ $-\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$

► Réponses et corrigés page 92

Réponses et corrigés

Fiche nº 1. Fractions

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

1.1 b) .... $\boxed{2^5}$

1.1 c) .... $\boxed{3}$

1.1 d) .... $\boxed{-2\times 3^{3k-2}}$

1.2 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

1.2 b) .... $\boxed{\dfrac{7}{15}}$

1.2 c) .... $\boxed{9}$

1.2 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{9}}$

1.3 a) .... $\boxed{247}$

1.3 b) .... $\boxed{\dfrac{203}{24}}$

1.3 c) .... $\boxed{\dfrac{-10}{3}}$

1.3 d) .... $\boxed{1\ 000}$

1.4 .... $\boxed{\dfrac{16}{35}}$

1.5 a) .... $\boxed{2\ 022}$

1.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

1.5 c) .... $\boxed{1}$

1.5 d) .... $\boxed{2}$

1.6 a) .... $\boxed{\dfrac{-1}{n(n+1)^2}}$

1.6 b) .... $\boxed{-\dfrac{ab}{a-b}}$

1.6 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}n}$

1.7 .... $\boxed{\dfrac{n^3+n}{n+1}}$

1.8 a) .... $\boxed{4+\dfrac{5}{6}}$

1.8 b) .... $\boxed{1+\dfrac{1}{k-1}}$

1.8 c) .... $\boxed{3+\dfrac{5}{x-2}}$

1.9 .... $\boxed{2t}$

1.10 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{5}>\dfrac{5}{9}}$

1.10 b) .... $\boxed{\dfrac{12}{11}>\dfrac{10}{12}}$

1.10 c) .... $\boxed{\dfrac{125}{25}=\dfrac{105}{21}}$

1.11 .... $\boxed{\text{Non}}$

1.12 .... $\boxed{A>B}$

Corrigés

1.1 a) $\dfrac{32}{40}=\dfrac{8\times 4}{8\times 5}=\dfrac{4}{5}$

1.1 b) $8^3\times\dfrac{1}{4^2}=(2\times 4)^3\times\dfrac{1}{4^2}=2^3\times 4^3\times\dfrac{1}{4^2}=2^3\times 4=2^5$

1.1 c) $\dfrac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4}=\dfrac{(3^3)^{-1}\times(2^2)^2}{3^{-4}\times 2^4}=\dfrac{3^4}{3^3}=3$

1.1 d) On a : $\dfrac{(-2)^{2k+1}\times 3^{2k-1}}{4^k\times 3^{-k+1}}=\dfrac{(-2)\times(-2)^{2k}\times 3^{2k}\times 3^{-1}}{4^k\times 3^{-k}\times 3}=\dfrac{(-2)\times 4^k\times 3^{2k}\times 3^k}{4^k\times 3^2}=-2\times 3^{3k-2}$.

1.2 a) On met au même dénominateur : $\dfrac{2}{4}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\times 3}{4\times 3}-\dfrac{1\times 4}{3\times 4}=\dfrac{6}{12}-\dfrac{4}{12}=\dfrac{6-4}{12}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$.

1.2 b) On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3}-0{,}2=\frac{2}{3}-\frac{2}{10}=\frac{2\times 10}{3\times 10}-\frac{2\times 3}{10\times 3}=\frac{20}{30}-\frac{6}{30}=\frac{20-6}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7\times 2}{15\times 2}=\frac{7}{15}.$$

1.2 c) Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times 5=\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times\frac{5}{1}=\frac{36\times 15\times 5}{25\times 12\times 1}=\frac{12\times 3\times 5\times 3\times 5}{5\times 5\times 12\times 1}=\frac{3\times 3}{1}=\frac{9}{1}=9.$$

1.2 d) Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par la fraction inverse de la deuxième fraction :

$$-\frac{2}{15}\div\left(-\frac{6}{5}\right)=-\frac{2}{15}\times\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{2}{15}\times\frac{5}{6}=\frac{2\times 5}{15\times 6}=\frac{2\times 5}{3\times 5\times 2\times 3}=\frac{1}{9}.$$

1.3 a) On développe :

$$(2\times3\times5\times7)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}) = \frac{2\times3\times5\times7}{2}+\frac{2\times3\times5\times7}{3}+\frac{2\times3\times5\times7}{5}+\frac{2\times3\times5\times7}{7}$$
$$= 3\times5\times7+2\times5\times7+2\times3\times7+2\times3\times5 = 105+70+42+30 = 247.$$

1.3 b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{62}{10}\right)\times\frac{21}{24} = \left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{31}{5}\right)\times\frac{7}{8}$$
$$= \left(\frac{136}{15}+\frac{3}{5}\right)\times\frac{7}{8} = \left(\frac{136}{15}+\frac{9}{15}\right)\times\frac{7}{8} = \frac{145}{15}\times\frac{7}{8} = \frac{29}{3}\times\frac{7}{8} = \frac{203}{24}.$$

1.3 c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10}\times7^3-25^5\times49^2}{(125\times7)^3+5^9\times14^3} = \frac{5^{10}\times7^3-5^{10}\times7^4}{5^9\times7^3+5^9\times7^3\times2^3} = \frac{5^{10}\times7^3(1-7)}{5^9\times7^3(1+2^3)} = \frac{5\times(-6)}{9} = \frac{-10}{3}.$$

1.3 d) On calcule :

$$\frac{1\,978\times1\,979+1\,980\times21+1\,958}{1\,980\times1\,979-1\,978\times1\,979} = \frac{1\,978\times1\,979+1\,979\times21+21+1\,958}{1\,979\times(1\,980-1\,978)}$$
$$= \frac{1\,979\times(1\,978+21)+1\,979}{1\,979\times2} = \frac{1\,979\times(1\,978+21+1)}{1\,979\times2} = \frac{1\,979\times2\,000}{1\,979\times2}$$
$$= 1\,000.$$

1.4 On calcule :

$$\frac{0{,}5-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{0{,}5-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-0{,}2}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-3{,}5} = \frac{\frac{3}{6}-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-\frac{7}{2}}$$
$$= \frac{3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}{5\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{-7\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)} = \frac{3}{5}-\frac{1}{7} = \frac{16}{35}.$$

1.5 a) On connaît l'identité remarquable : $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Donc : $\dfrac{2\,022}{(-2\,022)^2+(-2\,021)(2\,023)} = \dfrac{2\,022}{(2\,022)^2+(1-2\,022)\times(1+2\,022)} = \dfrac{2\,022}{(2\,022)^2+1-2\,022^2} = 2\,022.$

1.5 b) On fait apparaître 2 021 dans 2 020 et 2 022 au dénominateur :

$$\frac{2\,021^2}{2\,020^2+2\,022^2-2} = \frac{2\,021^2}{(2\,021-1)^2+(2\,021+1)^2-2}$$
$$= \frac{2\,021^2}{2\,021^2-2\times2\,021\times1+1+2\,021^2+2\times2\,021\times1+1-2}$$
$$= \frac{2\,021^2}{2\,021^2-2\times2\,021\times1+2\,021^2+2\times2\,021\times1} = \frac{2\,021}{2\,021-2+2\,021+2} = \frac{1}{2}.$$

1.5 c) En posant $a=1\,234$, on a : $1\,235=a+1$ et $2\,469=2a+1$.

Donc : $\dfrac{1\,235\times2\,469-1\,234}{1\,234\times2\,469+1\,235} = \dfrac{(a+1)(2a+1)-a}{a(2a+1)+a+1} = \dfrac{2a^2+2a+1}{2a^2+2a+1} = 1.$

1.5 d) En posant $a=1\,000$, on a : $999=a-1$, $1\,001=a+1$, $1\,002=a+2$ et $4\,002=2a+2$.

Donc : $\dfrac{4\,002}{1\,000\times1\,002-999\times1\,001} = \dfrac{4a+2}{a(a+2)-(a-1)(a+1)} = \dfrac{2(2a+1)}{a^2+2a-(a^2-1)} = \dfrac{2(2a+1)}{2a+1} = 2.$

1.6 a) On met au même dénominateur. Cela donne :

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n}{n(n+1)^2}+\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}=\frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2}$$
$$=\frac{n+n^2+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2}=\frac{-1}{n(n+1)^2}.$$

....

1.6 b) On rappelle la formule : $a^3-b^3=(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)$. Cela donne :

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{ab+a^2+b^2}{a-b}-\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}=-\frac{ab}{a-b}.$$

....

1.6 c) Pour $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, on a :

$$\frac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}=\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}\times\frac{n^2(n-1)^2}{2n+2}=\frac{6(n+1)}{2(n-1)}\times\frac{n(n-1)}{2(n+1)}=\frac{3}{2}n.$$

....

1.7 De $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, on a : $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2}k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k}=\dfrac{\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}\,\dfrac{2}{n(n+1)}=\dfrac{n(n^2+1)}{n+1}=\dfrac{n^3+n}{n+1}.$

....

1.8 a) On trouve $\dfrac{29}{6}=\dfrac{4\times 6+5}{6}=4+\dfrac{5}{6}.$

....

1.8 b) On trouve $\dfrac{k}{k-1}=\dfrac{k-1+1}{k-1}=1+\dfrac{1}{k-1}.$

....

1.8 c) On trouve $\dfrac{3x-1}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+5}{x-2}=3+\dfrac{5}{x-2}.$

....

1.9 Pour $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, on a :

$$A=\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t)^2}=\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2}-\frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{1+2t+t^2-\big(1+t^2\big)}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}.$$

Donc, $AB=\left(\dfrac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}\right)\times\big(1+t^2\big)(1+t)^2=2t.$

....

1.10 a) $\dfrac{3}{5}=\dfrac{27}{45}>\dfrac{5}{9}=\dfrac{25}{45}$

....

1.10 c) $\dfrac{125}{25}=5=\dfrac{105}{21}$

....

1.11 Nous allons étudier les produits en croix.

On sait que $A=B$, si et seulement si $33\,215\times 208\,341=66\,317\times 104\,348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impairs, il est impair. Par contre, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée. A et B ne sont pas égaux.

....

1.12 On ré-écrit $A=\dfrac{10^5+1}{10^6+1}$ et $B=\dfrac{10^6+1}{10^7+1}$. Nous allons étudier les produits en croix.

D'une part calculons : $(10^5+1)\times(10^7+1)=10^{12}+10^7+10^5+1.$

D'autre part : $(10^6+1)^2=10^{12}+2\times 10^6+1.$

Comme $(10^5+1)\times(10^7+1)>(10^6+1)\times\,(10^6+1)$, on obtient : $A>B$.

....

Fiche n° 2. Puissances

Réponses

2.1 a) .... $\boxed{10^8}$

2.1 b) .... $\boxed{10^{15}}$

2.1 c) .... $\boxed{10^2}$

2.1 d) .... $\boxed{10^{-2}}$

2.1 e) .... $\boxed{10^4}$

2.1 f) .... $\boxed{10^{-8}}$

2.2 a) .... $\boxed{15^4}$

2.2 b) .... $\boxed{5^{-6}}$

2.2 c) .... $\boxed{2^7}$

2.2 d) .... $\boxed{(-7)^{-2}}$

2.2 e) .... $\boxed{3^5}$

2.2 f) .... $\boxed{3^{28}}$

2.3 a) .... $\boxed{2^{-4}\cdot 3^{-1}}$

2.3 b) .... $\boxed{2^{21}\cdot 3}$

2.3 c) .... $\boxed{2}$

2.3 d) .... $\boxed{2^{38}\cdot 3^{26}}$

2.4 a) .... $\boxed{8}$

2.4 b) .... $\boxed{11}$

2.4 c) .... $\boxed{3^{10}}$

2.4 d) .... $\boxed{2^6\cdot 5}$

2.5 a) .... $\boxed{\dfrac{x}{x+1}}$

2.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{x-2}}$

2.5 c) .... $\boxed{\dfrac{2x}{x+1}}$

2.5 d) .... $\boxed{\dfrac{2}{x-2}}$

Corrigés

2.3 a) $\dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 6^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 2^{-1}\cdot 3^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^{4-1}\cdot 2^{8-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^3\cdot 2^7} = 2^{3-7}\cdot 3^{2-3} = 2^{-4}\cdot 3^{-1}$.

2.3 b) On factorise : $2^{21}+2^{22} = 2^{21}+2^{21}\cdot 2 = 2^{21}\cdot(1+2) = 2^{21}\cdot 3$.

2.3 c) On factorise au numérateur et au dénominateur : $\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}} = \dfrac{(3+1)\cdot 3^{21}}{(3-1)\cdot 3^{21}} = \dfrac{4}{2} = 2$.

2.3 d) On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n = a^n$ lorsque n est pair : $\dfrac{\left(3^2\cdot(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5\cdot 2^3\right)^{-2}} = \dfrac{3^{16}\cdot 2^{32}}{3^{-10}\cdot 2^{-6}} = 2^{38}\cdot 3^{26}$.

2.4 a) On fait apparaître les facteurs premiers 2 et 3 : $\dfrac{8^{17}\cdot 6^{-6}}{9^{-3}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{3\cdot 17}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-6}}{3^{2\cdot(-3)}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{51-6}\cdot 3^{-6}}{3^{-6}\cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8$.

2.4 b) Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\dfrac{55^2\cdot 121^{-2}\cdot 125^2}{275\cdot 605^{-2}\cdot 25^4} = \dfrac{(5\cdot 11)^2\cdot(11^2)^{-2}\cdot(5^3)^2}{5^2\cdot 11\cdot(11^2\cdot 5)^{-2}\cdot(5^2)^4} = \dfrac{5^8\cdot 11^{-2}}{5^8\cdot 11^{-3}} = 11$.

2.4 c) On fait apparaître les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\dfrac{12^{-2}\cdot 15^4}{25^2\cdot 18^{-4}} = \dfrac{(2^2)^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^4\cdot 5^4}{(5^2)^2\cdot 2^{-4}\cdot(3^2)^{-4}} = \dfrac{2^{-4}\cdot 3^2\cdot 5^4}{2^{-4}\cdot 3^{-8}\cdot 5^4} = 3^{10}$.

2.4 d) Même méthode que précédemment : $\dfrac{36^3\cdot 70^5\cdot 10^2}{14^3\cdot 28^2\cdot 15^6} = \dfrac{2^6\cdot 3^6\cdot 2^5\cdot 5^5\cdot 7^5\cdot 2^2\cdot 5^2}{2^3\cdot 7^3\cdot 2^4\cdot 7^2\cdot 3^6\cdot 5^6} = \dfrac{2^{13}\cdot 3^6\cdot 5^7\cdot 7^5}{2^7\cdot 3^6\cdot 5^6\cdot 7^5} = 2^6\cdot 5$.

2.5 a) On met au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires : $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x^2-x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x}{x+1}$

2.5 b) Même méthode : $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4} = \dfrac{2(x-2)-(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$

2.5 c) On commence par simplifier les puissances superflues, puis c'est le même principe que précédemment : $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x} = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x}{x+1}$

2.5 d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{x-2+x}{x(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{2}{x-2}$

Fiche nº 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) .... $\boxed{8x^3 - 6x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{8}}$

3.1 b) .... $\boxed{x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1}$

3.1 c) .... $\boxed{x^5 - x^3 + x^2 - 1}$

3.1 d) .... $\boxed{x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1}$

3.1 e) .... $\boxed{x^5 - x^3 - x^2 + 1}$

3.1 f) .... $\boxed{x^4 + x^2 + 1}$

3.2 a) .... $\boxed{-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4}$

3.2 b) .... $\boxed{-28 + 21x}$

3.2 c) .... $\boxed{2 + x^3 - x^4 - x^5}$

3.2 d) .... $\boxed{-1 - 3x - 3x^2 + x^3}$

3.2 e) .... $\boxed{1 + x^4}$

3.2 f) .... $\boxed{1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4}$

3.3 a) .... $\boxed{-6(6x + 7)}$

3.3 b) .... $\boxed{4(5x + 4)(-5x + 1)}$

3.3 c) .... $\boxed{2(3x - 4)(10x + 3)}$

3.3 d) .... $\boxed{-8(x + 1)(x + 16)}$

3.4 a) .... $\boxed{(x - 1)^2}$

3.4 b) .... $\boxed{(x + 2)^2}$

3.4 c) .... $\boxed{(x + 1)(x + 2)}$

3.4 d) .... $\boxed{3\left(x + \dfrac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \dfrac{7 + \sqrt{37}}{6}\right)}$

3.4 e) .... $\boxed{2\left(x + \dfrac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \dfrac{3 + \sqrt{233}}{4}\right)}$

3.4 f) .... $\boxed{-5(x - 1)\left(x - \dfrac{1}{5}\right)}$

3.5 a) .... $\boxed{(x + y - z)(x + y + z)}$

3.5 b) .... $\boxed{3(14x + 3y)(-4x + y)}$

3.5 c) .... $\boxed{(x + 1)(y + 1)}$

3.5 d) .... $\boxed{(x - 1)(y - 1)}$

3.5 e) .... $\boxed{(x + y)(x + 1)^2}$

3.5 f) .... $\boxed{\left(a^2 + b^2\right)\left(y - 4x^2\right)\left(y + 4x^2\right)}$

3.6 a) .... $\boxed{(x - 1)(x + 1)\left(x^2 + 1\right)}$

3.6 b) .... $\boxed{-8\left(x^2 + 1\right)(x - 4)(x + 4)}$

3.6 c) .... $\boxed{\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)}$

3.6 d) .... $\boxed{\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right)}$

3.6 e) ..... $\boxed{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)\left(p^2 + q^2 + r^2 + s^2\right)}$

Corrigés

3.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

....

3.1 b) On peut écrire : $(x-1)^3\left(x^2+x+1\right) = \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right)\left(x^2+x+1\right) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$. Pour être "efficace", il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p) = abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3) \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

....

3.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ et $(x+1)\left(x^2 - x + 1\right) = x^3 + 1$, on a facilement :

$$(x+1)^2(x-1)\left(x^2 - x + 1\right) = [(x+1)(x-1)]\left[(x+1)\left(x^2 - x + 1\right)\right] = \left(x^2 - 1\right)\left(x^3 + 1\right) = x^5 - x^3 + x^2 - 1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

....

3.1 d) On calcule : $(x+1)^2(x-1)\left(x^2+x+1\right) = \left(x^2 + 2x + 1\right)\left(x^3 - 1\right) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$.

....

3.1 e) On calcule : $(x-1)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right) = \left(x^2-1\right)\left(x^3-1\right) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$.

3.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49 = -(6x+7)(6x-1)+(6x)^2-7^2 = (6x+7)[-(6x-1)+6x-7] = -6(6x+7)$$

.

3.3 b) On calcule $25-(10x+3)^2 = 5^2-(10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)$.

3.4 c) La forme canonique est $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$. On en déduit la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2-b^2 = \ldots$

3.4 d) La forme canonique est $3\left[\left(x+\dfrac{7}{6}\right)^2 - \dfrac{37}{36}\right]$.

3.4 e) La forme canonique est $2\left[\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{233}{16}\right]$.

3.4 f) La forme canonique est $-5\left[\left(x-\dfrac{3}{5}\right)^2 - \dfrac{4}{25}\right]$.

3.5 b) On calcule $x^2+6xy+9y^2-169x^2 = (x+3y)^2-(13x)^2 = (14x+3y)(-12x+3y) = 3(14x+3y)(-4x+y)$.

3.5 e) On calcule $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y = (x+y)(x^2+2x+1) = (x+y)(x+1)^2$.

3.6 a) On calcule $x^4-1 = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) = (x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$.

3.6 b) On calcule $\left(-9x^2+24\right)\left(8x^2+8\right)+64x^4-64 = -8\left(x^2+1\right)\left[9x^2-24-8\left(x^2-1\right)\right] = -8\left(x^2+1\right)(x-4)(x+4)$.

3.6 c) On calcule $x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = \left(x^2+1\right)-x^2 = \left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$. La factorisation est alors terminée sur $\mathbb{R}$ puisque les deux équations, $x^2+x+1=0$ et $x^2-x+1=0$, n'ont pas de solutions réelles.

3.6 d) Une fois n'est pas coutume : on peut commencer par développer avant de factoriser. Ce qui donne

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 = a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 = \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right).$$

Remarque : signalons tout de même qu'une autre voie (sans calcul) consiste à interpréter en termes de module d'un produit de deux nombres complexes !

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

4.1 a) .... $\boxed{5}$

4.1 b) .... $\boxed{\sqrt{3}-1}$

4.1 c) .... $\boxed{-\sqrt{3}+2}$

4.1 d) .... $\boxed{\sqrt{7}-2}$

4.1 e) .... $\boxed{\pi-3}$

4.1 f) .... $\boxed{|3-a|}$

4.2 a) .... $\boxed{20}$

4.2 b) .... $\boxed{9+4\sqrt{5}}$

4.2 c) .... $\boxed{1+\sqrt{3}}$

4.2 d) .... $\boxed{3+\sqrt{2}}$

4.2 e) .... $\boxed{12\sqrt{7}}$

4.2 f) .... $\boxed{12}$

4.2 g) .... $\boxed{9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}}$

4.2 h) .... $\boxed{10}$

4.3 a) .... $\boxed{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}}$

4.3 b) .... $\boxed{3-2\sqrt{2}}$

4.3 c) .... $\boxed{1-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$

4.3 d) .... $\boxed{\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2}$

4.3 e) .... $\boxed{-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

4.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}}$

4.3 g) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.3 h) .... $\boxed{50-25\sqrt{3}}$

4.4 .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$

4.5 a) .... $\boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}}$

4.5 b) .... $\boxed{x-\sqrt{x^2-1}}$

4.5 c) .... $\boxed{1+\sqrt{x-1}}$

4.5 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}}$

4.5 e) .... $\boxed{\dfrac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}}$

4.5 f) .... $\boxed{-4(x-1)^2}$

4.6 a) .... $\boxed{\sqrt{2}}$

4.6 b) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.7 a) .... $\boxed{-11+5\sqrt{5}}$

4.7 b) .... $\boxed{1+\sqrt{2}}$

4.7 c) .... $\boxed{1+\sqrt{2}}$

4.7 d) .... $\boxed{\sqrt{3}}$

4.7 e) .... $\boxed{1+\sqrt{5}}$

4.7 f) .... $\boxed{\ln(1+\sqrt{2})}$

4.8 .... $\boxed{1}$

Corrigés

4.1 a) Quand a est un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a donc $\sqrt{(-5^2)}=5$.

4.1 f) On trouve $|3-a|$, c'est-à-dire $3-a$ si $a \leqslant 3$ et $a-3$ si $a \geqslant 3$.

4.2 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}.$$

4.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \\ &= \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{2^2-2} = \frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2} \\ &= 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}.\end{aligned}$$

4.4 On pose $A := \dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. On a :

$$A = \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)\left(1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer. On a

$$A = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)}{\left(4+2\sqrt{6}\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)} = \frac{4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}-4+2\sqrt{6}}{16-24} = \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

Ainsi, on a $\boxed{\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$: ce qu'on cherchait.

Remarque : on pouvait aussi faire un autre type de quantité conjuguée :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

4.5 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{x+2f(x)} = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x-1}^2+2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1.$$

4.5 e) Le calcul donne $f''(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x-1)^{3/2}}$ d'où :

$$f(x)+4f''(x) = \sqrt{x-1}-\frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}((x-1)^2-1) = \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

4.6 a) On calcule :

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3+\sqrt{5}-2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}}+3-\sqrt{5} = 6-2\sqrt{9-5} = 6-2\sqrt{4} = 6-4 = 2.$$

De plus, $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} \geqslant 0$, donc $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

4.7 b) On calcule $3+2\sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}+1 = (\sqrt{2})^2+2\times 1\times\sqrt{2}+1^2 = (1+\sqrt{2})^2$ et on trouve donc

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

4.7 e) On calcule : $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{1+2\sqrt{5}+\sqrt{5}^2} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = 1+\sqrt{5}$.

4.8 Appelons A ce nombre barbare, et écrivons-le $A = \alpha-\beta$ en posant

$$\alpha = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} \text{ et } \beta = \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}.$$

Plutôt que de se lancer dans des choses compliquées, calculons A^3 à l'aide de l'identité remarquable. On a

$$A^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 = \alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)$$

ce qui donne

$$A^3 = 6-3A\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}\right)\left(-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}\right)}$$

d'où finalement $A^3 = 6-5A$, ce qui est équivalent à $(A-1)(A^2+A+6) = 0$ en observant que 1 est racine évidente de l'équation $t^3+5t-6 = 0$ d'inconnue t, puis finalement 1 est l'unique racine réelle de cette équation, et donc $A = 1$.

Fiche n° 5. Expressions algébriques

Réponses

5.1 a) .... $\boxed{7a^2+12a+7}$

5.1 b) .... $\boxed{a^2-1}$

5.1 c) .... $\boxed{4a^2-a-3}$

5.1 d) .... $\boxed{-a^2+1}$

5.2 a) .... $\boxed{8+6\mathrm{i}}$

5.2 b) .... $\boxed{8-6\mathrm{i}}$

5.2 c) .... $\boxed{18-26\mathrm{i}}$

5.2 d) .... $\boxed{-9-46\mathrm{i}}$

5.3 a) .... $\boxed{39-18\mathrm{i}}$

5.3 b) .... $\boxed{2197}$

5.3 c) .... $\boxed{-4+43\mathrm{i}\sqrt{5}}$

5.3 d) .... $\boxed{1}$

5.4 a) .... $\boxed{3}$

5.4 b) .... $\boxed{1}$

5.4 c) .... $\boxed{1}$

5.4 d) .... $\boxed{0}$

5.4 e) .... $\boxed{-1}$

5.4 f) .... $\boxed{31}$

5.5 a) .... $\boxed{a^2+2}$

5.5 b) .... $\boxed{a^3+3a}$

5.5 c) .... $\boxed{a^4+4a^2+2}$

5.6 a) .... $\boxed{a^2-2b}$

5.6 b) .... $\boxed{ab-3c}$

5.6 c) .... $\boxed{a^3-3ab+3c}$

5.6 d) .... $\boxed{ab-c}$

5.6 e) .... $\boxed{ac}$

5.6 f) .... $\boxed{-2ac+b^2}$

5.7 a) .... $\boxed{a^2b-ac-2b^2}$

5.7 b) ... $\boxed{a^4-4a^2b+4ac+2b^2}$

5.7 c) .... $\boxed{0}$

5.7 d) .... $\boxed{1}$

5.7 e) .... $\boxed{a}$

Corrigés

5.1 a) On développe $(a+2)^3 = a^3+6a^2+12a+8$, puis on simplifie sachant que $a^3 = a^2-1$.

5.1 b) De $a^3 = a^2-1$, on déduit $a^6 = a^3(a^2-1) = a^5-a^3$ et donc $a^5-a^6 = a^3$. De plus $a^3 = a^2-1$.

5.1 c) On commence par $a^6 = (a^3)^2 = (a^2-1)^2 = a^4-2a^2+1 = -a^2-a$ puis $a^{12} = (-a^2-a)^2 = a^4+2a^3+a^2$.

5.1 d) L'égalité a^3-a^2+1 peut s'écrire $a(a-a^2)=1$ ce qui montre que $a\neq 0$ et $\dfrac{1}{a} = a-a^2$. Alors $\dfrac{1}{a^2} = 1-a$.

5.2 a) On développe : $(3+\mathrm{i})^2 = 9+6\mathrm{i}+\mathrm{i}^2$.

5.2 b) On développe : $(3-\mathrm{i})^2 = 9+6(-\mathrm{i})+(-\mathrm{i})^2 = 9-6\mathrm{i}+\mathrm{i}^2$.

5.2 c) D'après le calcul précédent : $(3-\mathrm{i})^3 = (8-6\mathrm{i})(3-\mathrm{i}) = 24-18\mathrm{i}-8\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2$.

5.2 d) On développe directement : $(3-2\mathrm{i})^3 = 3^3-3\cdot 3^2(2\mathrm{i})^1+3\cdot 3^1(2\mathrm{i})^2-(2\mathrm{i})^3$.

5.3 a) On développe : $24-30\mathrm{i}+12\mathrm{i}-15\mathrm{i}^2$.

5.3 b) En remarquant que $(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i}) = 2^2-(3\mathrm{i})^2 = 4+9$, on obtient par associativité 13^3.

5.3 c) On développe : $(-4+\mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -4^3+3\cdot 4^2(\mathrm{i}\sqrt{5})-3\cdot 4^1(\mathrm{i}\sqrt{5})^2+(\mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -64+48\mathrm{i}\sqrt{5}+60-5\mathrm{i}\sqrt{5}$.

5.3 d) On développe : $(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = -\dfrac{1}{8}+3\cdot i\dfrac{\sqrt{3}}{8}+3\cdot\dfrac{3}{8}-i\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

5.4 a) De $a^5 = 1$, on déduit $a^7 = a^2$ et $a^6 = a$ donc tous les termes se simplifient sauf deux : $4-1=3$.

5.4 b) On commence par $a^{1234} = (a^{10})^{123} \times a^4 = a^4$ car $a^{10} = (a^5)^2 = 1$. De même $a^{2341} = a^1$, *etc.* et on obtient donc finalement $a^4 \times a^1 \times a^2 \times a^3 = a^{10} = 1$.

5.4 c) Ceci vaut a^S où $S = \sum_{k=0}^{1234} k = \dfrac{1234 \times (1234+1)}{2}$ est un entier multiple de 5.

5.4 d) Cette somme partielle de suite géométrique vaut $\dfrac{a^5-1}{a-1}$.

5.4 e) Cette somme géométrique vaut $\dfrac{a^{99}-1}{a-1} \times a^1 = \dfrac{a^{100}-a}{a-1} = \dfrac{1-a}{a-1} = -1$.

5.4 f) En réordonnant les facteurs et en développant, on obtient :

$$(2-a^1)(2-a^4)(2-a^2)(2-a^3) = (5-2(a+a^4))(5-2(a^2+a^3)) = 25 - 10(a+a^2+a^3+a^4) + 4(a+a^4)(a^2+a^3).$$

Or $a+a^2+a^3+a^4 = -1$ et $(a+a^4)(a^2+a^3) = a^3+a^6+a^4+a^7 = a+a^2+a^3+a^4 = -1$ aussi.

5.5 a) On complète le carré : $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \dfrac{1}{x}$.

5.5 b) On se ramène au résultat précédent : $x^3 - \dfrac{1}{x^3} = x\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \left(x - \dfrac{1}{x}\right) = a(a^2+2) + a$.

5.5 c) De même : $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = x^2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{x^2}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 2 = (a^2+2)^2 - 2$.

5.6 a) On développe $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ puis on conclut par soustraction.

5.6 b) On reconnaît $x(xy+zx) + y(yz+xy) + z(zx+yz) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - 3xyz$.

5.6 c) Le développement $(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3\big[x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)\big]+6xyz$ conduit par soustraction à $a^3 - 3(ab-3c) - 6c$ d'après l'expression précédente.

5.6 d) *Première solution* : on développe et on obtient une combinaison des expressions précédentes.

Deuxième solution : on reconnaît $(a-z)(a-x)(a-y) = a^3 - (x+y+z)a^2 + (xy+yz+zx)a - xyz$.

5.6 e) En factorisant, on reconnaît $(x+y+z)xyz$.

5.6 f) On se ramène à $(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 = (xy+yz+zx)^2 - 2(x^2yz + y^2xz + z^2xy)$.

5.7 a) On cherche $x^2(xy+zx)+y^2(yz+xy)+z^2(zx+yz)$, c'est-à-dire $(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx) - x^2yz - y^2zx - z^2xy$.

5.7 b) *Première solution* : on développe $(x+y+z)^4$ puis on conclut par soustraction à l'aide des calculs précédents.

Deuxième solution : on remarque qu'il s'agit de calculer $(x^2)^2 + (y^2)^2 + (z^2)^2 = (x^2+y^2+z^2)^2 - 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$, donc qu'il suffit de développer $(a^2-2b)^2 - 2(b^2-2ac)$.

5.7 c) On réduit au même dénominateur $(x-y)(y-z)(z-x)$ puis on développe le numérateur.

5.7 d) On réduit au même dénominateur $(x-y)(y-z)(z-x)$ puis on factorise le numérateur par $(z-y)$:

$$\begin{aligned} x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x) &= x^2(z-y)+(y^2-z^2)x-yz(y-z) \\ &= (z-y)\big[x^2-(y+z)x+yz\big], \end{aligned}$$

et l'on reconnaît pour le dernier facteur : $x^2-(y+z)x+yz=(x-y)x-(x-y)z=(x-y)(x-z)$.

....

5.7 e) On procède de même :

$$\begin{aligned} x^3(z-y)+y^3(x-z)+z^3(y-x) &= x^3(z-y)+(y^3-z^3)x-yz(y^2-z^2) \\ &= (z-y)\big[x^3-(y^2+yz+z^2)x+yz(y+z)\big] \\ &= (z-y)\big[(x^2-y^2)x-yz(x-y)-z^2(x-y)\big] \\ &= (z-y)(x-y)\big[(x+y)x-yz-z^2\big] \\ &= (z-y)(x-y)\big[(x^2-z^2)+(x-z)y\big] \\ &= (z-y)(x-y)(x-z)[(x+z)+y], \end{aligned}$$

d'où $x+y+z=a$ après simplification par le dénominateur.

....

Fiche n° 6. Équations du second degré

Réponses

6.1 a) .... $\boxed{3, 3}$

6.1 b) .... $\boxed{-1/3, -1/3}$

6.1 c) .... $\boxed{2, -6}$

6.1 d) .... $\boxed{2, 3}$

6.1 e) .... $\boxed{0, \text{ donc } 5}$

6.1 f) .... $\boxed{0, \text{ donc } -3/2}$

6.1 g) .... $\boxed{\varnothing}$

6.1 h) .... $\boxed{1 \text{ donc } -5}$

6.1 i) .... $\boxed{1 \text{ donc } 8/3}$

6.1 j) .... $\boxed{-1 \text{ donc } -19/5}$

6.2 a) .... $\boxed{6, 7}$

6.2 b) .... $\boxed{-3, -5}$

6.2 c) .... $\boxed{-7, -11}$

6.2 d) .... $\boxed{-3, 11}$

6.2 e) .... $\boxed{a, b}$

6.2 f) .... $\boxed{a-b, a+b}$

6.3 a) .... $\boxed{2/3}$

6.3 b) .... $\boxed{-2/7}$

6.3 c) .... $\boxed{-1/m}$

6.3 d) .... $\boxed{2m/(m+3)}$

6.4 a) .... $\boxed{1 \text{ donc } (a-b)/(b-c)}$

6.4 b) .... $\boxed{1 \text{ donc } c(a-b)/(a(b-c))}$

6.4 c) .... $\boxed{m \text{ donc } -(m+a+b)}$

6.4 d) .... $\boxed{m \text{ donc } m(a-b)/(b-c)}$

6.4 e) .... $\boxed{m \text{ donc } ab/m}$

6.4 f) .... $\boxed{a+b \text{ puis } 2ab/(a+b).}$

6.5 a) .... $\boxed{x^2 - 22x + 117 = 0}$

6.5 b) .... $\boxed{x^2 - 6x - 187 = 0}$

6.5 c) .... $\boxed{x^2 - 4x + 1 = 0}$

6.5 d) .... $\boxed{x^2 - 2mx + 3 = 0}$

6.5 e) .... $\boxed{2x^2 - (4m+1)x + (2m^2 + m - 15) = 0}$

6.5 f) .... $\boxed{m^2x^2 + (m - 2m^2)x + (m^2 - m - 2) = 0}$

6.6 a) .... $\boxed{m = -3/4 \text{ et } x = 3/4}$

6.6 b) .... $\boxed{m = -1 \text{ et } x = -2, \text{ ou } m = 7 \text{ et } x = 2/3}$

6.6 c) .... $\boxed{m = 1 \text{ et } x = -1 \text{ ou } m = -1 \text{ et } x = 1}$

6.7 a) .... $\boxed{a = 2 \text{ et } b = 3}$

6.7 b) .... $\boxed{a = -2 \text{ et } b = 1}$

6.7 c) .... $\boxed{a = -3 \text{ et } b = 5}$

6.7 d) .... $\boxed{a = 1/2 \text{ et } b = 8}$

6.7 e) .... $\boxed{a = 1 \text{ et } b = 3\sqrt{7}}$

6.8 a) .... $\boxed{]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[}$

6.8 b) .... $\boxed{[-3, 5]}$

6.8 c) .... $\boxed{]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[}$

6.8 d) .... $\boxed{]-\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[}$

Corrigés

6.1 a) C'est une identité remarquable : $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

....

6.1 c) Le nombre 2 est racine évidente, l'autre est donc -6 en regardant le produit des racines qui vaut -12.

....

6.1 e) La racine 0 est la racine évidente par excellence ; la somme des racines valant ici 5 l'autre racine est 5.

....

6.1 g) La fonction $x \longmapsto 2x^2 + 3$ est strictement postivie car elle est minorée par 3, donc elle ne s'annule pas.

....

6.2 a) Ici on cherche des racines un peu moins évidentes : on remplace le problème par le problème équivalent de la détermination de deux nombres x_1, x_2 dont le produit vaut 42 et la somme 13. On teste donc les factorisations évidentes de 42, ici $42 = 6 \times 7$ et $13 = 6 + 7$.

....

6.2 b) On cherche deux nombres dont le produit vaut 15 et la somme -8 : les nombres -3 et -5 conviennent.

....

6.4 e) En réduisant au même dénominateur de part et d'autre l'équation devient $m(x^2 + ab) = x(m^2 + ab)$ qui est une équation du second degré. Sur la forme initiale de l'équation on lit que m est racine évidente, l'autre est donc ab/m. Peut-être aurait-on pu voir cette racine « évidente » directement ?

....

6.4 f) Le nombre 0 est bien tentant, mais n'est pas racine de l'équation. En revanche $a + b$ convient. L'équation se réécrit $(a+b)(x-a)(x-b) = ab(2x-(a+b))$, d'où une équation du second degré dont le coefficient devant x^2 vaut $a+b$ et le terme constant $2ab(a+b)$, donc la deuxième solution de cette équation est $\dfrac{2ab}{a+b}$.

....

6.5 a) La somme des racines vaut 22, leur produit 117. L'équation cherchée est donc $x^2 - 22x + 117 = 0$.

....

6.6 a) Une équation du second degré admet une racine double si, et seulement si, son discriminant est nul.

Ici, le discriminant vaut $\Delta = (2m+3)^2 - 4m^2 = 3(4m-3)$. Ainsi, l'équation admet une racine double si, et seulement si, m vaut $-3/4$ ce qui donne $x = 3/4$.

....

6.6 b) Ici, le déterminant vaut $\Delta = 4(m^2 - 6m - 7)$, donc une racine évidente est -1 donc l'autre vaut 7. Pour $m = -1$ on trouve $x = -2$ et pour $m = 7$ on trouve $x = 2/3$.

....

6.6 c) Ici le discriminant vaut $\Delta = 4((3m+1)^2 - (m+3)^2) = 32(m^2 - 1)$ donc l'équation admet une racine double si et seulement si m vaut 1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 + 2x + 1 = 0$ et la racine double est -1, ou m vaut -1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 - 2x + 1 = 0$ dont la racine double est 1.

....

6.8 a) Un trinôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur de l'intervalle des racines, et du signe opposé entre les racines. Ici, les racines sont $\sqrt{2}$ et 1, le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement négatif sur $]1, \sqrt{2}[$.

....

6.8 b) Les racines sont -5 et 3. Le trinôme est donc strictement négatif sur $]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ et strictement positif sur $]-3, 5[$.

....

6.8 c) Ici, les racines sont -1 et $2/3$. Le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, -1[\cup]2/3, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1, 2/3[$.

....

6.8 d) Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit ! Donc le quotient considéré est strictement positif sur $]-\infty, -1/2[\cup]4, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1/2, 4[$ (attention à l'annulation du dénominateur !).

....

Fiche n° 7. Exponentielle et logarithme

Réponses

7.1 a)	$\boxed{4\ln 2}$
7.1 b)	$\boxed{9\ln 2}$
7.1 c)	$\boxed{-3\ln 2}$
7.1 d)	$\boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$
7.1 e)	$\boxed{3\ln 2}$
7.1 f)	$\boxed{2\ln 2 + 2\ln 3}$
7.2 a)	$\boxed{-\ln 3 - 2\ln 2}$
7.2 b)	$\boxed{2\ln 3 - 2\ln 2}$
7.2 c)	$\boxed{\ln 3 + 11\ln 2}$
7.2 d)	$\boxed{3\ln 5 + 2\ln 2}$
7.2 e)	$\boxed{-2\ln 5 + 4\ln 2}$
7.2 f)	$\boxed{2\ln 5 - 2\ln 2}$
7.3	$\boxed{-2\ln 2 - 2\ln 5}$
7.4 a)	$\boxed{\frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)}$
7.4 b)	$\boxed{17+12\sqrt{2}}$
7.4 c)	$\boxed{0}$
7.4 d)	$\boxed{0}$
7.5 a)	$\boxed{8}$
7.5 b)	$\boxed{\frac{1}{2}}$
7.5 c)	$\boxed{\frac{1}{3}}$
7.5 d)	$\boxed{\frac{1}{9}}$
7.5 e)	$\boxed{-\frac{1}{2}}$
7.5 f)	$\boxed{\frac{3}{2}}$
7.6 a)	$\boxed{-2}$
7.6 b)	$\boxed{\frac{1}{\ln 2}}$
7.6 c)	$\boxed{-17}$
7.6 d)	$\boxed{1}$
7.6 e)	$\boxed{-1}$
7.6 f)	$\boxed{e}$
7.7 a)	impaire
7.7 b)	impaire
7.7 c)	impaire
7.7 d)	impaire
7.8 a)	$\boxed{\mathbb{R}}$
7.8 b)	ok
7.8 c)	$\boxed{1}$
7.8 d)	-1
7.9 a)	$\boxed{x+\ln 2}$
7.9 b)	$\boxed{\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}}$
7.9 c)	$\boxed{\ln\lvert x-1\rvert}$
7.9 d)	$\boxed{-\frac{1}{1+x}}$
7.9 e)	$\boxed{(1+x)^x}$
7.10 a)	$\boxed{x \geqslant \frac{\ln 12+5}{3}}$
7.10 b)	$\boxed{x\in[0,1]}$
7.10 c)	$\boxed{x \geqslant \frac{2}{e}}$
7.10 d)	$\boxed{x \geqslant -\frac{1}{12}}$
7.10 e)	$\boxed{\varnothing}$
7.10 f)	$\boxed{\frac{-13-\sqrt{273}}{2}}$

Corrigés

7.1 a) On a $16 = 4^2 = 2^4$ donc $\ln 16 = 4\ln 2$.

7.1 c) On a $0{,}125 = \frac{1}{8}$ donc $\ln 0{,}125 = -\ln 8 = -3\ln 2$.

7.1 e) On a $72 = 8\times 9 = 2^3\times 3^2$ donc $\ln 72 - 2\ln 3 = (3\ln 2 + 2\ln 3) - 2\ln 3 = 3\ln 2$.

7.2 c) On a $0{,}875 = \frac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned}\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0{,}875) &= (\ln 3+\ln 7) + 2(\ln 2+\ln 7) - 3(\ln 7 - \ln 8)\\ &= \ln 3 + 2\ln 3 + 3\times 3\ln 2 = 3\ln 3 + 11\ln 2.\end{aligned}$$

7.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln 98 - \ln 99) + (\ln 99 - \ln 100)$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

On peut écrire plus rigoureusement ce calcul :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{99} \ln \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{99} (\ln k - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{j=2}^{100} \ln j \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k+1$ d'où finalement $A = \ln 1 - \ln 100 = -2(\ln 2 + \ln 5)$.

7.4 a) On a $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$

On a donc

$$\alpha = \frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \frac{7}{16} \ln((1+\sqrt{2})^2) + 4\ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{7}{8} \ln(1+\sqrt{2}) + 4\ln \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

d'où finalement $\alpha = -\dfrac{7}{8} \ln \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + 4\ln \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8} \ln \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8} \ln(\sqrt{2}-1)$.

7.4 c) On a $\gamma = \ln\Big(\big((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\big)^{20}\Big) = \ln\big(\big((4-3)^{20}\big)\big) = 0$

7.6 b) On a $\mathrm{e}^{-\ln \ln 2} = \mathrm{e}^{(-1)\ln(\ln 2)} = (\ln 2)^{-1} = \dfrac{1}{\ln 2}$.

7.6 e) On a $\ln\Big(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\Big) = \dfrac{1}{2} \ln\big(\exp(-\ln \mathrm{e}^2)\big) = \dfrac{1}{2}(-\ln \mathrm{e}^2)) = \dfrac{1}{2} \times (-2) = -1$.

7.7 a) f_1 est définie sur $]-2021, +2021[$ qui est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in\,]-2021, +2021[, \quad f(-x) = \ln \frac{2021 - x}{2021 + x} = \ln \frac{1}{\frac{2021+x}{2021-x}} = -\ln \frac{2021+x}{2021-x} = -f_1(x).$$

7.7 b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant |x| < \sqrt{x^2+1}$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) \\ &= \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln \frac{(-x + \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \ln \frac{-x^2 + (x^2+1)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = -f_2(x). \end{aligned}$$

7.10 f) Attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Pour la première équation, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big( ]61, +\infty[\cap]-\infty, -7[\Big)$, qui est l'ensemble vide, donc la première équation n'admet aucune solution.

Pour la seconde, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big( ]-\infty, -7[\cup]61, +\infty[\Big)$, c'est-à-dire dans l'intervalle $]-\infty, -7[$. Dans ce cas, un réel x appartenant à $]-\infty, -7[$ est solution de l'équation si et seulement si x vérifie $x^2 + 13x - 26 = 0$. Or, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-13 - \sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-13 + \sqrt{273}}{2}$. Seul x_1 convient car $x_1 \in\,]-\infty, -7[$ et $x_2 \notin\,]-\infty, -7[$.

Fiche n° 8. Trigonométrie

Réponses

8.1 a) .... $\boxed{0}$

8.1 b) .... $\boxed{0}$

8.1 c) .... $\boxed{-1-\sqrt{3}}$

8.1 d) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

8.2 a) .... $\boxed{0}$

8.2 b) .... $\boxed{-\sin x}$

8.2 c) .... $\boxed{2\cos x}$

8.2 d) .... $\boxed{-2\cos x}$

8.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

8.3 b) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

8.3 c) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

8.3 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}$

8.4 a) .... $\boxed{-\sin x}$

8.4 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{\cos x}}$

8.4 c) .... $\boxed{0}$

8.4 d) .... $\boxed{4\cos^3 x-3\cos x}$

8.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

8.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

8.6 a) .... $\boxed{\tan x}$

8.6 b) .... $\boxed{2}$

8.6 c) .... $\boxed{8\cos^4 x-8\cos^2 x+1}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right\}}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{-2\pi}{3},\dfrac{-\pi}{3}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{5\pi}{6},-\dfrac{\pi}{6}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 d) .... $\boxed{\left\{\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}\right\}}$

8.7 d) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right\}}$

8.7 d) .... $\boxed{\left\{\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 e) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\dfrac{7\pi}{4}\right\}}$

8.7 e) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{3\pi}{4},-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right\}}$

8.7 e) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 f) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right\}}$

8.7 f) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{5\pi}{6},-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right\}}$

8.7 f) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 g) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{12},\dfrac{11\pi}{12},\dfrac{13\pi}{12},\dfrac{23\pi}{12}\right\}}$

8.7 g) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{11\pi}{12},-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{12},\dfrac{11\pi}{12}\right\}}$

8.7 g) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{11\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 h) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{3\pi}{2}\right\}}$

8.7 h) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right\}}$

8.7 h) .... $\boxed{\left\{\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 i) .... $\boxed{\left\{\frac{\pi}{7}, \frac{13\pi}{7}\right\}}$

8.7 i) .... $\boxed{\left\{-\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}\right\}}$

8.7 i) ...... $\boxed{\left\{\frac{\pi}{7}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{7}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 j) .... $\boxed{\left\{\frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14}\right\}}$

8.7 j) .... $\boxed{\left\{\frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14}\right\}}$

8.7 j) ...... $\boxed{\left\{\frac{5\pi}{14}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{9\pi}{14}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.8 a) .... $\boxed{\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]}$

8.8 a) .... $\boxed{\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]}$

8.8 b) .... $\boxed{\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]}$

8.8 b) .... $\boxed{\left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]}$

8.8 c) .... $\boxed{\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]}$

8.8 c) .... $\boxed{\left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]}$

8.8 d) .... $\boxed{\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]}$

8.8 d) .... $\boxed{\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]}$

8.8 e) .... $\boxed{\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[}$

8.8 e) .... $\boxed{\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[}$

8.8 f) ..... $\boxed{\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]}$

8.8 f) .... $\boxed{\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]}$

8.8 g) .... $\boxed{\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]}$

8.8 g) .... $\boxed{\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]}$

8.8 h) .... $\boxed{\left[0, \frac{3\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi\right]}$

8.8 h) .... $\boxed{\left[-\pi, -\frac{5\pi}{8}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{8}, \pi\right]}$

Corrigés

8.3 b) On peut utiliser $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ puis les formules d'addition.

....

8.4 b) On a

$$\frac{\sin 2x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\cos x}=\frac{\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin(2x-x)}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\cos x}.$$

On peut aussi faire cette simplification à l'aide des formules de duplication :

$$\frac{\sin 2x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}-\frac{2\cos^2 x-1}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}$$

....

8.4 d) On calcule

$$\begin{aligned}\cos(3x)=\cos(2x+x)&=\cos(2x)\cos x-\sin(2x)\sin x=(2\cos^2 x-1)\cos x-2\cos x\sin^2 x\\&=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x(1-\cos^2 x)=4\cos^3 x-3\cos x.\end{aligned}$$

....

8.5 a) On a $\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$ donc $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}=\frac{\sqrt{2}+2}{4}$. De plus, $\cos\frac{\pi}{8}\geqslant 0$ donc $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

....

8.5 b) On a $\sin^2\frac{\pi}{8}=1-\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{8}\geqslant 0$ donc $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

8.6 a) On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ donc $\dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \dfrac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \tan x$.

8.6 b) On a $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \dfrac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} = \dfrac{\sin(3x - x)}{\sin x \cos x} = \dfrac{\sin(2x)}{\sin x} = \dfrac{2\sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2$.

8.6 c) On a $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

8.7 e) Cela revient à résoudre « $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ».

8.7 g) Si on résout avec $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x \in [0, 4\pi]$.

Or, dans $[0, 4\pi]$, on a $\cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour $t \in \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{13\pi}{6}, \dfrac{23\pi}{6}\right\}$ et donc pour $x \in \left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}\right\}$.

8.7 h) $\sin x$ est solution de l'équation de degré 2 : $2t^2 + t - 1 = 0$ dont les solutions sont $t = -1$ et $t = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, les x solutions sont les x tels que $\sin x = -1$ ou $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

8.7 j) On a $\cos \dfrac{\pi}{7} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{7}\right) = \sin \dfrac{5\pi}{14}$. Finalement, on résout $\sin x = \sin \dfrac{5\pi}{14}$.

8.8 d) Cela revient à résoudre $-\dfrac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

8.8 f) On résout « $\tan x \geqslant 1$ ou $\tan x \leqslant -1$ ».

8.8 g) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = x - \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geqslant 0$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$ et donc $x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

8.8 h) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x - \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 4\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geqslant 0$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 4\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{2}, \dfrac{15\pi}{4}\right]$ puis $x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{8}, \dfrac{11\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$.

Fiche nº 9. Dérivation

Réponses

9.1 a) .... $\boxed{6x^2+2x-11}$

9.1 b) .... $\boxed{5x^4-6x^2+4x-15}$

9.1 c) .... $\boxed{(2x^2-2x+10)\exp(2x)}$

9.1 d) .... $\boxed{(6x-1)\ln(x-2)+\dfrac{3x^2-x}{x-2}}$

9.2 a) .... $\boxed{5(x^2-5x)^4(2x-5)}$

9.2 b) .... $\boxed{4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)}$

9.2 c) .... $\boxed{8\cos^2(x)-6\cos(x)\sin(x)-4}$

9.2 d) .... $\boxed{-3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x))}$

9.3 a) .... $\boxed{\dfrac{2x}{x^2+1}}$

9.3 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{x\ln(x)}}$

9.3 c) .... $\boxed{(-2x^2+3x+1)\exp(x^2+x)}$

9.3 d) .... $\boxed{6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))}$

9.4 a) .... $\boxed{\dfrac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)}$

9.4 b) .... $\boxed{\dfrac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2}\sin\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)}$

9.4 c) .... $\boxed{\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}}$

9.4 d) .... $\boxed{\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}$

9.5 a) .... $\boxed{\dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}}$

9.5 b) .... $\boxed{\dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}}$

9.5 c) .... $\boxed{-2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}}$

9.5 d) .... $\boxed{\dfrac{(4x+3)\ln(x)-2x-3}{(\ln(x))^2}}$

9.6 a) .... $\boxed{2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

9.6 b) .... $\boxed{\dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}}$

9.6 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{1-x^2}}$

9.6 d) .... $\boxed{\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}}$

9.7 a) .... $\boxed{\dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}}$

9.7 b) .... $\boxed{\dfrac{2}{x+1}\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}$

9.7 c) .... $\boxed{\dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}}$

9.7 d) .... $\boxed{\dfrac{x^2}{(x+1)^2}}$

9.7 e) .... $\boxed{\dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}}$

Corrigés

9.1 a) On calcule : $f'(x)=(2x+3)(2x-5)+(x^2+3x+2)\times 2=6x^2+2x-11$.

....

9.1 b) On calcule : $f'(x)=(3x^2+3)(x^2-5)+(x^3+3x+2)\times 2x=5x^4-6x^2+4x-15$.

....

9.1 c) On calcule : $f'(x)=(2x-2)\exp(2x)+(x^2-2x+6)\times 2\exp(2x)=(2x^2-2x+10)\exp(2x)$.

....

9.1 d) On calcule : $f'(x)=(6x-1)\ln(x-2)+(3x^2-x)\times\dfrac{1}{x-2}=(6x-1)\ln(x-2)+\dfrac{3x^2-x}{x-2}$.

....

9.2 a) On calcule : $f'(x)=5(x^2-5x)^4(2x-5)$.

....

9.2 b) On calcule : $f'(x) = 2(2x^3+4x-1)(6x^2+4) = 4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)$.

9.2 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin(x)+2\cos(x))(\cos(x)-2\sin(x)) = 2(\sin(x)\cos(x)-2\sin^2(x)+2\cos^2(x)-4\cos(x)\sin(x) \\ &= -6\cos(x)\sin(x)-4\sin^2(x)+4\cos^2(x) = -6\cos(x)\sin(x)-4(1-\cos^2(x))+4\cos^2(x) \\ &= 8\cos^2(x)-6\cos(x)\sin(x)-4. \end{aligned}$$

9.2 d) On calcule : $f'(x) = 3(3\cos(x)-\sin(x))^2(-3\sin(x)-\cos(x)) = -3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x))$.
En développant, on trouve : $f'(x) = -54\cos^2(x)\sin(x) - 78\cos^3(x) - 9\sin(x) + 51\cos(x)$.

9.3 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. C'est une application directe de la formule de dérivation quand $f = \ln\circ u$.

9.3 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1/x}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

9.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\exp(x^2+x) + (2-x)\exp(x^2+x)\times(2x+1) = (-1+(2-x)(2x+1))\exp(x^2+x) \\ &= (-1+4x+2-2x^2-x)\exp(x^2+x) = (-2x^2+3x+1)\exp(x^2+x). \end{aligned}$$

9.3 d) On calcule : $f'(x) = \exp(3\sin(2x))(3\times 2\cos(2x)) = 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$.

9.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big)\times\frac{4x(x^2+1)-(2x^2-1)\times 2x}{(x^2+1)^2} = \cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big)\frac{4x^3+4x-4x^3+2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big). \end{aligned}$$

9.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big)\times\frac{2(x^2+4)-(2x+1)\times 2x}{(x^2+4)^2} = -\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big)\times\frac{2x^2+8-4x^2-2x}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2}\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big). \end{aligned}$$

9.4 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin(x)}}\cos(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$.

9.4 d) On calcule : $f'(x) = \cos(\sqrt{x})\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

9.5 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$. En développant le numérateur, on trouve

$$f'(x) = \frac{-2x^2\cos(x)+4x\sin(x)-6x\cos(x)+6\sin(x)+6x+9}{(2\sin(x)+3)^2}.$$

9.5 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2)-\sqrt{x}\times 3}{(3x+2)^2} = \dfrac{\frac{3x+2}{2\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(3x+2)^2} = \dfrac{3x+2-6x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$

9.5 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-2\sin(2x+1)\times(x^2+1)-\cos(2x+1)\times 2x}{(x^2+1)^2} = -2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$.

9.5 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - (2x^2+3x)\dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

9.6 a) On calcule : $f'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \times \left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

9.6 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2} - x\frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x)}{\sqrt{9-x^2}^2} = \dfrac{\sqrt{9-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \dfrac{\frac{9-x^2+x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$

9.6 c) On a trois fonctions composées à la suite : $f = \ln(\sqrt{u})$). Donc on a, en appliquant deux fois la formule de dérivée d'une fonction composée : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u-x)}} \times u'(x) \times \dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$.

On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} \times \frac{1(x-1)-(x+1)\times 1}{(x-1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} \\ &= \frac{1}{2\times\dfrac{x+1}{x-1}} \times \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

9.6 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\cos(x)\times x - \sin(x)\times 1}{x^2} \times \dfrac{x}{\sin(x)} = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\sin(x)}$.

9.7 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-(-1)}{(3-x)^2} + \dfrac{-1}{(2+x)^2} = \dfrac{(2+x)^2 - (3-x)^2}{(3-x)^2(2+x)^2} = \dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$.

9.7 b) On calcule : $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x(x+1)-1}{x+1} = \dfrac{2x^2+2x-1}{x+1}$.

Pour le trinôme $2x^2+2x-1$, on calcule $\Delta = 4 - 4\times 2\times(-1) = 12$. On a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2\times 2} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Enfin, on a $f'(x) = \dfrac{2(x - \frac{-1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{-1+\sqrt{3}}{2})}{x+1} = \dfrac{2}{x+1}\left(x + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

9.7 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+2} - \dfrac{1\times(x-1)-(x+2)\times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$.

On cherche les racines du trinôme x^2+x-2 dont le discriminant est $\Delta = 1+8 = 9$; on identifie deux racines $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. D'où la forme factorisée : $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$.

Alors : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \dfrac{3}{(x-1)^2} = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)^2} + \dfrac{3(x+2)}{(x+2)(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

Le trinôme $2x^2+2x+5$ dont le discriminant est $\Delta = 4 - 4\times 2\times 5 = -36 < 0$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

9.7 d) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\times(x+1) - x\times 1}{(x+1)^2} + 1 - 2\frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{1+(x+1)^2-2(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1+x^2+2x+1-2x-2}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

9.7 e) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1-\ln(x)) - (1+\ln(x))\frac{-1}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{2}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$.

Fiche n° 10. Primitives

Réponses

10.1 a) .... $\boxed{\ln|t+1|}$

10.1 b) .... $\boxed{-\dfrac{3}{t+2}}$

10.1 c) .... $\boxed{-\dfrac{3}{2(t+2)^2}}$

10.1 d) .... $\boxed{-\dfrac{\cos(4t)}{4}}$

10.2 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}}$

10.2 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}}$

10.2 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(2t)}$

10.2 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}\mathrm{Arctan}(3t)}$

10.3 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}\ln|1+t^3|}$

10.3 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}$

10.3 c) .... $\boxed{-\sqrt{1-t^2}}$

10.3 d) .... $\boxed{\dfrac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}}$

10.3 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}\ln(1+3t^2)}$

10.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{1}{(1+3t^2)^2}}$

10.4 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln^4 t}$

10.4 b) .... $\boxed{2\sqrt{\ln t}}$

10.4 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{(3-\mathrm{e}^{2t})^2}}$

10.4 d) .... $\boxed{-\dfrac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}}$

10.4 e) .... $\boxed{\ln|1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}|}$

10.4 f) .... $\boxed{-\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}$

10.5 a) .... $\boxed{-\dfrac{1}{3}\cos^3 t}$

10.5 b) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\sin t}}$

10.5 c) .... $\boxed{-\ln|\cos t|}$

10.5 d) .... $\boxed{-\ln|1-\sin t|}$

10.5 e) .... $\boxed{-2\cos\sqrt{t}}$

10.5 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\sin(\pi\ln t)}$

10.5 g) .... $\boxed{\tan t - t}$

10.5 h) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\tan^2 t + \ln|\cos t|}$

10.5 i) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\tan^4 t}$

10.5 j) .... $\boxed{2\sqrt{\tan t}}$

10.5 k) .... $\boxed{-\dfrac{1}{\tan t}}$

10.5 l) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-\sin t)^2}}$

10.5 m) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(2t)}$

10.5 n) .... $\boxed{\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^t)}$

10.5 o) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}(\mathrm{Arcsin}(t))^2}$

10.5 p) .... $\boxed{\ln|\mathrm{Arcsin}(t)|}$

10.6 a) .... $\boxed{\dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin(2t)}{4}}$

10.6 b) .... $\boxed{-\dfrac{\cos(4t)}{8} - \dfrac{\cos(2t)}{4}}$

10.6 c) .... $\boxed{-\cos t + \dfrac{1}{3}\cos^3 t}$

10.6 d) .... $\boxed{\ln(1+\sin^2 t)}$

10.6 e) .... $\boxed{\ln|\tan t|}$

10.6 f) .... $\boxed{-\mathrm{cotan} t + \tan t}$

10.6 g) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln|\tan 2t|}$

10.7 a) .... $\boxed{t + \ln|t| - \dfrac{1}{t}}$

10.7 b) .... $\boxed{\ln|t| - \dfrac{1}{2t^2}}$

10.7 c) $t+\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^5}{5}$

10.7 d) $t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}$

10.7 e) $t-2\ln|t+1|$

10.7 f) $t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}-\ln|t+1|$

10.7 g) $\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)-\operatorname{Arctan}(t)$

10.7 h) $\ln|t+1|+\dfrac{1}{t+1}$

10.8 a) $2(t-1)$ puis $\dfrac{1}{3}t^3-t^2+5t$

10.8 b) $-\dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{2}{t}+1\right)$ puis $-\dfrac{1}{t}+\ln|t|$

10.8 c) $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}+\dfrac{3}{t^4}$ puis $\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2t^2}$

10.8 d) $-\dfrac{4}{t^5}-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{t^{5/2}}$ puis $-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{t^3}-\dfrac{2}{\sqrt{t}}$

10.8 e) $2e^{2t}-3e^{-3t}$ puis $\dfrac{1}{2}e^{2t}-\dfrac{1}{3}e^{-3t}$

10.8 f) $3e^{3t-2}$ puis $\dfrac{1}{3}e^{3t-2}$

10.8 g) $-\dfrac{t(t^3+2)}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}$ puis $\dfrac{1}{3}\ln(|t^3-1|)$

10.8 h) $-\dfrac{3t^2-2t-3}{(t^2+1)^2}$ puis $\dfrac{3}{2}\ln(t^2+1)-\operatorname{Arctan}(t)$

10.8 i) $\cos t(3\cos^2 t-2)$ puis $-\dfrac{1}{3}\cos^3 t$

10.8 j) $\sinh(t)^2+\cosh^2(t)$ puis $\dfrac{1}{2}\sinh^2(t)$

10.8 k) $-\dfrac{2t\sin\frac{1}{t}+\cos\frac{1}{t}}{t^4}$ puis $\cos\dfrac{1}{t}$

10.8 l) $\dfrac{2e^t}{(2+e^t)^2}$ puis $\ln(2+e^t)$

10.8 m) $\dfrac{2\cos t+3}{(2+3\cos t)^2}$ puis $-\dfrac{1}{3}\ln|2+3\cos t|$

10.8 n) $\dfrac{1}{(1-t^2)^{3/2}}$ puis $-\sqrt{1-t^2}$

10.8 o) $2\dfrac{3\cos^2 t-1}{(1+\cos^2 t)^2}$ puis $-\ln(1+\cos^2(t))$

10.8 p) $(1-2t^2)e^{-t^2}$ puis $-\dfrac{1}{2}e^{-t^2}$

10.8 q) $\dfrac{\ln t-2}{t^2}$ puis $\ln t-\dfrac{1}{2}\ln^2 t$

10.8 r) $-\dfrac{1+\ln t}{t^2\ln^2 t}$ puis $\ln|\ln t|$

10.8 s) $\dfrac{\cos\ln t-\sin\ln t}{t^2}$ puis $-\cos(\ln t))$

10.8 t) $-\dfrac{e^t(e^{2t}-1)}{(1+e^{2t})^2})$ puis $\operatorname{Arctan}(e^t)$

Corrigés

10.1 a) Admet des primitives sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$.

10.1 b) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

10.1 c) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

10.1 d) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

10.2 a) Admet des primitives sur $]0,+\infty[$.

10.2 b) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

10.2 c) Admet des primitives sur $]-1/2,1/2[$.

10.2 d) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

10.5 g) $\displaystyle\int^t \tan^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int^t ((1+\tan^2\theta)-1)\,\mathrm{d}\theta = \tan t - t + \mathrm{cte}$

10.5 h) $\displaystyle\int^t \tan^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \int^t ((\tan^2\theta+1)\tan\theta - \tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\tan^2 t + \ln|\cos t| + \mathrm{cte}$

10.6 a) $\displaystyle\int^x \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + \mathrm{cte}$

10.6 b) On a

$$\begin{aligned}\int^t \cos(\theta)\sin(3\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int^t \frac{1}{2}(\sin(3\theta+\theta)+\sin(3\theta-\theta))\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int^t \frac{1}{2}(\sin(4\theta)+\sin(2\theta))\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\cos(4t)}{8} - \frac{\cos(2t)}{4} + \mathrm{cte}.\end{aligned}$$

10.6 c) $\displaystyle\int^t \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \int^t (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t + \mathrm{cte}$

10.6 d) $\displaystyle\int^t \frac{\sin(2\theta)}{1+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \ln(1+\sin^2 t) + \mathrm{cte}$

10.6 e) $\displaystyle\int^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \int^t \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \ln|\sin t| - \ln|\cos t| + \mathrm{cte} = \ln|\tan t| + \mathrm{cte}$

10.6 f) $\displaystyle\int^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)} = \int^t \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta = -\mathrm{cotan}(t) + \tan(t) + \mathrm{cte}$

10.6 g) On a

$$\begin{aligned}\int^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin(4\theta)} &= \int^t \frac{\cos^2(2\theta)+\sin^2(2\theta)}{2\sin(2\theta)\cos(2\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int^t \frac{1}{4}\left(\frac{2\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} + \frac{2\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\ln|\sin(2t)| - \frac{1}{4}\ln|\cos(2t)| + \mathrm{cte} = \frac{1}{4}\ln|\tan 2t| + \mathrm{cte}.\end{aligned}$$

10.7 c) On a $1-t^6 = 1^3 - (t^2)^3 = (1-t^2)(1+t^2+t^4)$ donc finalement on cherche une primitive de $1+t^2+t^4$.

10.7 e) $\displaystyle\int^t \frac{\theta-1}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{\theta+1-2}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(1 - \frac{2}{\theta+1}\right)\mathrm{d}\theta = t - 2\ln|t+1| + \mathrm{cte}$

10.7 f) $\displaystyle\int^t \frac{\theta^3}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{\theta^3+1-1}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{(\theta+1)(1-\theta+\theta^2)-1}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln|t+1| + \mathrm{cte}$

10.7 h) $\displaystyle\int^t \frac{\theta}{(\theta+1)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{\theta+1-1}{(\theta+1)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(\frac{1}{\theta+1} - \frac{1}{(\theta+1)^2}\right)\mathrm{d}\theta = \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} + \mathrm{cte}$

Fiche n° 11. Calcul d'intégrales

Réponses

11.1 a) .... $\boxed{\text{Positif}}$

11.1 b) .... $\boxed{\text{Négatif}}$

11.1 c) .... $\boxed{\text{Positif}}$

11.2 a) .... $\boxed{14}$

11.2 b) .... $\boxed{50}$

11.2 c) .... $\boxed{\dfrac{147}{2}}$

11.2 d) .... $\boxed{-54}$

11.2 e) .... $\boxed{0}$

11.2 f) .... $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

11.3 a) .... $\boxed{8}$

11.3 b) .... $\boxed{-2}$

11.3 c) .... $\boxed{\dfrac{8}{3}}$

11.3 d) .... $\boxed{0}$

11.3 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{30}}$

11.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{2}{101}}$

11.4 a) .... $\boxed{0}$

11.4 b) .... $\boxed{1}$

11.4 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

11.4 d) .... $\boxed{18}$

11.4 e) ...... $\boxed{e^2 - e^{-3}}$

11.4 f) .... $\boxed{-\ln 3}$

11.5 a) .... $\boxed{78}$

11.5 b) ..... $\boxed{2(e^3 - 1)}$

11.5 c) . $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\ln\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)}$

11.5 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{6}}$

11.5 e) .... $\boxed{6}$

11.5 f) ...... $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

11.6 a) .... $\boxed{0}$

11.6 b) .... $\boxed{0}$

11.6 c) ..... $\boxed{\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)}$

11.6 d) .... $\boxed{-\dfrac{1}{384}}$

11.6 e) ... $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)}$

11.6 f) .... $\boxed{\dfrac{7}{48}}$

11.7 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{e+1}}$

11.7 b) .... $\boxed{\dfrac{17}{2}}$

11.7 c) .... $\boxed{e^2}$

11.7 d) .... $\boxed{3e - 4}$

11.7 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{3}}$

11.7 f) .... $\boxed{\dfrac{5}{8}}$

11.8 a) .... $\boxed{0}$

11.8 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

11.8 c) .... $\boxed{\dfrac{99}{\ln 10}}$

11.8 d) .... $\boxed{\dfrac{e - \frac{1}{e}}{2}}$

11.8 e) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

11.8 f) .... $\boxed{\dfrac{2\pi}{9}}$

Corrigés

11.1 a) On intègre une fonction positive et les bornes sont « dans le bon sens ».

11.1 b) $\displaystyle\int_5^{-3} |\sin 7x|\,dx = -\int_{-3}^{5} |\sin 7x|\,dx$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. Elle est positive car on intègre une fonction positive.

11.1 c) $\displaystyle\int_0^{-1} \sin x\,dx = -\int_{-1}^{0} \sin x\,dx$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. sin est négative sur $[-\pi, 0]$ donc sur $[-1, 0]$, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sin x\,dx$ est donc négative.

11.2 a) Il s'agit de l'aire d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 7.

11.2 b) On commence par mettre les bornes « dans le bon sens » : $\displaystyle\int_7^{-3} -5\,dx = -\int_{-3}^{7} -5\,dx = \int_{-3}^{7} 5\,dx$. Cette dernière intégrale est l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 10 et 5.

11.2 c) Il s'agit de l'aire du triangle dont les sommets sont l'origine O, le point $A(7;0)$ et $B(7;21)$. Ce triangle est rectangle en A et son aire est $\dfrac{1}{2} \times AO \times AB$.

11.2 d) Les bornes sont « dans le bon sens », on peut donc interpréter l'intégrale comme une aire algébrique. Sur l'intervalle $[2, 8]$, la courbe de $f(x) = 1 - 2x$ est située sous l'axe des abscisses, l'aire algébrique sera négative.

Il s'agit de calculer l'aire du trapèze rectangle dont les sommets sont $A(2;0)$, $B(8;0)$, $C(8;-15)$ et $D(2;-3)$. L'aire de ce trapèze rectangle est $\frac{1}{2} \times AB \times (AD + BC) = \frac{1}{2} \times 6 \times (3 + 15)$.

11.2 e) Avec la relation de Chasles, on a $\int_{-2}^{2} \sin x \,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \sin x \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \sin x \,\mathrm{d}x$.La fonction sinus étant impaire, les aires algébriques $\int_{-2}^{0} \sin x \,\mathrm{d}x$ et $\int_{0}^{2} \sin x \,\mathrm{d}x$ sont opposées, il suit que leur somme est nulle.

11.2 f) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique. Cette aire est composée de deux triangles rectangles (les intégrales de -2 à 0 et de 0 à 1).

11.3 a) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique d'un rectangle.

11.3 b) $\int_{1}^{3} 2x - 5 \,\mathrm{d}x = \left[x^2 - 5x\right]_1^3 = (3^2 - 15) - (1^2 - 5) = -2.$

11.3 c) $\int_{-2}^{0} x^2 + x + 1 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2\right) = \frac{8}{3}.$

11.3 d) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.3 e) $\int_{0}^{1} x^5 - x^4 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}.$

11.3 f) $\int_{1}^{-1} x^{100} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{101}x^{101}\right]_1^{-1} = -\frac{2}{101}.$

11.4 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.4 b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \,\mathrm{d}x = \left[\sin x\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$

11.4 c) $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

11.4 d) $\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_1^{100} = 18.$

11.4 e) $\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x\right]_{-3}^{2} = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}.$

11.4 f) $\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \left[\ln|x|\right]_{-3}^{-1} = -\ln 3.$

11.5 a) $\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{8}(2x+1)^4\right]_{-1}^{2} = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78.$

11.5 b) $\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} \,\mathrm{d}x = \left[2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\right]_{-2}^{4} = 2(\mathrm{e}^3 - 1).$

11.5 c) $\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x + 2} = \left[\frac{1}{\pi}\ln|\pi x + 2|\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{\pi+2}{2}\right).$

11.5 d) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}.$

11.5 e) $\displaystyle\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\right]_0^{33} = \frac{2}{3}(10-1) = 6.$

....

11.5 f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\mathrm{d}x = \left[-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

....

11.6 a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)\right]_1^3 = 0.$

....

11.6 b) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

....

11.6 c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x}x\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

....

11.6 d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^5\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}(\cos x)^6\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6.$

....

11.6 e) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$

....

11.6 f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,\frac{-1}{3}\,\frac{1}{(x^2+1)^3}\right]_0^1 = \frac{7}{48}.$

....

11.7 a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{\mathrm{e}+1}+\frac{1}{2}.$

....

11.7 b) $x+1$ est négatif sur $[-2,-1]$ et positif sur $[-1,3]$. On en déduit : $\displaystyle\int_{-2}^3 |x+1|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} -x-1\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^3 x+1\,\mathrm{d}x.$
Ces deux intégrales se calculent avec des primitives ou en les interprétant comme des aires de triangles.

....

11.7 c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \max(1,\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \mathrm{d}x + \int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2.$

....

11.7 d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 3\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x - 2\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 3(\mathrm{e}-1)-2\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = 3\mathrm{e}-4.$

....

11.7 e) On calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2(x)-1)\sin(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{3}\Big[\cos^3(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

....

11.7 f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \left|\frac{1}{2}\sin(2x)\right|\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)|\,\mathrm{d}x.$ Le signe de $\sin(2x)$ est négatif sur $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ et positif sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, il suit que

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} -\sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{0} - \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{4}.$$

....

11.8 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

....

11.8 b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\arctan(x)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

....

11.8 c) $\displaystyle\int_0^2 10^x\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{e}^{x\ln 10}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\ln 10}\mathrm{e}^{x\ln 10}\right]_0^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\ln 10}-1}{\ln 10} = \frac{99}{\ln 10}.$

11.8 d) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{sh}(x)\Big]_0^1 = \mathrm{sh}(1) = \frac{\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}}{2}.$

11.8 e) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$

11.8 f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+(3x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{1}{3}\arctan(3x)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{3}\arctan(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{9}.$

Fiche n° 12. Intégration par parties

Réponses

12.1 a) .... $\boxed{\frac{\pi}{2} - 1}$

12.1 b) .... $\boxed{\frac{5}{2}\mathrm{ch}(2) - \frac{1}{2}\mathrm{sh}(2) - \frac{3}{2}}$

12.1 c) .... $\boxed{4}$

12.1 d) .... $\boxed{\dfrac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2\ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}}$

12.1 e) .... $\boxed{1}$

12.1 f) .... $\boxed{2\ln 2 - \frac{3}{4}}$

12.1 g) .... $\boxed{\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}}$

12.1 h) .... $\boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$

12.1 i) .... $\boxed{\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1}$

12.1 j) .... $\boxed{-\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}}$

12.1 k) .... $\boxed{\frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9}}$

12.1 l) .... $\boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}}$

12.2 a) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x \end{cases}}$

12.2 b) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\dfrac{1+\ln x}{x} \end{cases}}$

12.2 c) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{cases}}$

12.2 d) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) \end{cases}}$

12.3 a) .... $\boxed{\frac{5}{2} - \mathrm{e}^2}$

12.3 b) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}}$

12.4 a) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}(-\cos(x)\mathrm{sh}(x) + \sin(x)\mathrm{ch}(x)) \end{cases}}$

12.4 b) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x \end{cases}}$

12.4 c) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\left(\frac{1}{3}\ln^2 x - \frac{2}{9}\ln x + \frac{2}{27}\right) \end{cases}}$

12.4 d) .... $\boxed{\begin{cases}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) \end{cases}}$

Corrigés

12.1 a) On choisit $u'(t) = \cos t$ et $v(t) = t$. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t = [t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - 1.$

....

12.1 b) On choisit $u'(t) = \mathrm{sh}(2t)$ et $v(t) = 2t+3$. $\displaystyle\int_0^1 (2t+3)\mathrm{sh}(2t)\,\mathrm{d}t = \left[(2t+3)\frac{\mathrm{ch}(2t)}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{ch}(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{2}\mathrm{ch}(2) - \frac{3}{2} - \frac{\mathrm{sh}(2)}{2}.$

....

12.1 c) On choisit $v(t) = t$ et $u'(t) = \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$. $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[2t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^2 - 2\int_0^2 \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 4e - 4\left[\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^2 = 4.$

....

12.1 d) On choisit $v(t) = t$ et $u'(t) = 2^t$. $\displaystyle\int_1^{\ln(2)} t2^t\,\mathrm{d}t = \int_1^{\ln(2)} t\mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t = \left[t\frac{1}{\ln(2)}2^t\right]_1^{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)}\int_1^{\ln(2)} \mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t = 2^{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{(\ln(2))^2}[2^t]_1^{\ln(2)} = \frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2\ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}.$

....

12.1 e) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\,\mathrm{d}t = [t\ln t]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1.$

12.1 f) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln t$. $\displaystyle\int_1^2 t\ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t = 2\ln 2 - \frac{1}{4}\left[t^2\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

12.1 g) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln(2) - 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \ln 2 - 2[t-\arctan(t)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$.

12.1 h) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \arctan t$. On a

$$\int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\arctan t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

12.1 i) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arcsin t$. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t\,\mathrm{d}t = [t\arcsin t]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}$.

12.1 j) On choisit $u'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ et $v(t) = t$. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = \left[2t\sqrt{1+t}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}$.

12.1 k) On choisit $u'(t) = \sqrt{1+t}$ et $v(t) = \ln(1+t)$. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\ln(1+t)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}(1+t))^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9}$.

12.1 l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,\mathrm{d}t$. On choisit dans la première intégrale, $v(t) = t$ et $u'(t) = 1 + \tan^2 t$. On obtient $\displaystyle[t\tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t\,\mathrm{d}t - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + [\ln\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$.

12.2 a) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$, en choisissant $u'(t) = \mathrm{e}^t$ et $v(t) = -t+1$, on a $\displaystyle\int_0^x (-t+1)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[(-t+1)\mathrm{e}^t\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (-x+1)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 2$. Ainsi, $x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$.

12.2 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x > 0$, par intégration par parties avec $u'(t) = \dfrac{1}{t^2}$ et $v(t) = \ln t$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$. Ainsi, $x \mapsto -\dfrac{\ln x + 1}{x}$ est donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de f

12.2 c) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arctan t$, $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t = [t\arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. D'où une primitive.

12.2 d) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a, en choisissant $v(t) = t$ et $u'(t) = \mathrm{ch}t$, $\displaystyle\int_0^x t\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t = [t\mathrm{sh}(t)]_0^x - \int_0^x \mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t = x\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) + 1$. D'où une primitive.

12.3 a) On effectue deux intégrations par parties successives : pour la première, $u'(t) = \mathrm{e}^{2t}$ et $v(t) = t^2+3t-4$ et ainsi $\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[(t^2+3t-4)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t$. Puis, seconde intégration par parties avec, $v(t) = 2t+3$ et $u'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{2}$ d'où :$\displaystyle- \int_0^1 (2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t = 2 - \left[(2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{11}{4} - \frac{5}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{2t}\right]_0^1 = \frac{5}{2} - \mathrm{e}^2$.

12.3 b) On choisit d'abord $u' = \exp$ et $v = \sin$; d'où : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \, \mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \cos t \, \mathrm{d}t$. Ensuite $u' = \exp$ et $v = \cos$, d'où : $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\mathrm{e}^t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \, \mathrm{d}t$. Finalement, $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1$.

12.4 a) On effectue deux intégrations par parties successives pour déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t) \, \mathrm{d}t$. On commence par choisir $u' = \sin$ et $v = \mathrm{sh}$ cela donne $\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t) \, \mathrm{d}t = [-\cos(t)\mathrm{sh}(t)]_0^x + \int_0^x \cos(t)\mathrm{ch}(t) \, \mathrm{d}t$. Puis, on choisit $u' = \cos$ et $v = \mathrm{ch}$, ce qui donne $-\cos(x)\mathrm{sh}(x) + [\sin(t)\mathrm{ch}(t)]_0^x - \int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t) \, \mathrm{d}t$. Finalement, $\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(-\cos(x)\mathrm{sh}(x) + \sin(x)\mathrm{ch}(x))$.

12.4 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue. Soit $x > 0$, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln^2 t$ on obtient $\int_1^x \ln^2 t \, \mathrm{d}t = \left[t \ln^2 t\right]_1^x - \int_1^x 2 \ln t \, \mathrm{d}t$. Puis, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$, on obtient $x \ln^2 x - 2[t \ln t]_1^x + 2\int_1^x 1 \, \mathrm{d}t = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x - 2$. Ainsi, $x \mapsto x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \ln^2 x$.

12.4 c) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x > 0$, alors, avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln^2(t)$, on a : $\int_1^x t^2 \ln^2 t \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3} \ln^2 t\right]_1^x - \frac{2}{3}\int_1^x t^2 \ln t \, \mathrm{d}t$ puis avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln(t)$, on obtient $\frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2}{9}\left[t^3 \ln t\right]_1^x + \frac{2}{9}\int_1^x t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{x^3 \ln^2 x}{3} - \frac{2}{9}x^3 \ln x + \frac{2}{27}(x^3 - 1)$. D'où une primitive.

12.4 d) La fonction est définie et continue sur $]-1, 1[$. Si $x \in]-1, 1[$, alors, en posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \mathrm{e}^{\arccos(t)}$, on obtient $\int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)} \, \mathrm{d}t = \left[t\mathrm{e}^{\arccos(t)}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{e}^{\arccos(t)} \, \mathrm{d}t$, ensuite, en posant $u'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et $v(t) = \mathrm{e}^{\arccos(t)}$, on obtient $x\mathrm{e}^{\arccos(x)} - \left[\sqrt{1-t^2}\mathrm{e}^{\arccos(t)}\right]_0^x + \int_0^x \sqrt{1-t^2} \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{e}^{\arccos(t)} \, \mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{\arccos(x)} - \sqrt{1-x^2}\mathrm{e}^{\arccos(x)} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)} \, \mathrm{d}t$. D'où $\int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

Fiche n° 13. Systèmes linéaires

Réponses

13.1 a) .... $\boxed{\{(3,1)\}}$

13.1 b) .... $\boxed{\{(7,2)\}}$

13.1 c) .... $\boxed{\left\{(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\right\}}$

13.1 d) .... $\boxed{\left\{(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}}$

13.2 a) .... $\boxed{\left\{(1-\frac{a}{4},\frac{-1}{2}+\frac{3}{8}a)\right\}}$

13.2 b) .... $\boxed{(2,-3)}$

13.2 c) .... $\boxed{\left\{(\frac{1}{13}a+\frac{5}{13}a^2,\frac{2}{13}a-\frac{3}{13}a^2)\right\}}$

13.2 d) .... $\boxed{(a-2a^2,a+a^2)}$

13.3 a) .... $\boxed{\{(1+z,-z,z);z\in\mathbb{R}\}}$

13.3 b) .... $\boxed{\{(1,y,3+2y);y\in\mathbb{R}\}}$

13.3 c) .... $\boxed{\left\{(\frac{13}{6}-\frac{5}{3}z,-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}z,z);z\in\mathbb{R}\right\}}$

13.3 d) .... $\boxed{\left\{(x,\frac{-5}{12}-\frac{3}{2}x,\frac{-25}{24}-\frac{7}{4}x);x\in\mathbb{R}\right\}}$

13.4 a) .... $\boxed{\{(2,-1,3)\}}$

13.4 b) .... $\boxed{\{(-1,4,2)\}}$

13.4 c) .... $\boxed{\varnothing}$

13.4 d) .... $\boxed{\left\{(-\frac{2}{7}-z,\frac{-3}{7},z)\,;\,z\in\mathbb{R}\right\}}$

13.5 a) .... $\boxed{\{(1,1/2,1/2)\}}$

13.5 b) .... $\boxed{\varnothing}$

13.5 c) .... $\boxed{\{(5z,1-4z,z)\ ;\ z\in\mathbb{R}\}}$

13.5 d) .... $\boxed{\left\{(1,\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2})\right\}}$

13.6 a) .... $\boxed{\{(5,3,-1)\}}$

13.6 b) .... $\boxed{\varnothing}$

13.6 c) .... $\boxed{\left\{(\frac{a^2+a-1}{a^3-1}c,\frac{a^2-a+1}{a^3-1}c,\frac{-a^2+a+1}{a^3-1}c)\right\}}$

13.7 a) .... $\boxed{\{(0,0,0)\}}$

13.7 b) .... $\boxed{\{(x,y,-x-y)\,;\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}}$

13.7 c) .... $\boxed{\{(x,x,x)\,;\,x\in\mathbb{R}\}}$

Corrigés

13.1 a) On calcule :

$$\begin{cases} x-2y=1\\ 3x+4y=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y\\ 3(1+2y)+4y=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y\\ 10y+3=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y=10\\ x=1+2y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1\\ x=3\end{cases}$$

....

13.1 b) On calcule : $\begin{cases} 2x+y=16\\ x-y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=16-2x\\ x-16+2x=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=5+16=21\\ y=16-2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7\\ y=16-14=2\end{cases}$

....

13.1 c) On calcule : $\begin{cases} 3x-6y=-3\\ 2x+2y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-1\\ x+y=1\end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2y=-1\\ 3y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2}{3}\\ x=-1+2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

....

13.1 d) On calcule :

$$\begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2}\\ 6x+2y=3\sqrt{2}\end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2}\\ 8y+2y=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2}\\ 10y=5\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 3x=4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\end{cases}$$

....

13.2 a) On calcule : $\begin{cases} 3x+2y=2 \\ 2x+4y=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\dfrac{3}{2}x \\ 2x+4-6x=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\dfrac{3}{2}x \\ -4x=a-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\dfrac{a}{4} \\ y=1-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{8}a=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{3}{8}a \end{cases}$

13.2 b) On calcule :

$$\begin{cases} x-ay=3a+2 \\ ax+y=2a-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=ay+3a+2 \\ a^2y+3a^2+2a+y=2a-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=ay+3a+2 \\ (a^2+1)y=2a-3-3a^2-2a \end{cases}$$

$$\underset{1+a^2\neq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y=\dfrac{-3-3a^2}{1+a^2}=-3 \\ x=-3a+3a+2=2 \end{cases}$$

13.2 c) On calcule :

$$\begin{cases} 3x+5y=a \\ 2x-y=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-a^2 \\ 3x+5\times(2x-a^2)=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-a^2 \\ 13x-5a^2=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2 \\ y=2\times\left(\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2\right)-a^2=\dfrac{2}{13}a-\dfrac{3}{13}a^2 \end{cases}$$

13.2 d) On calcule :

$$\begin{cases} x+2y=3a \\ 2x+3y=5a-a^2 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y=3a \\ -y=5a-a^2-6a=-a^2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a+a^2 \\ x=3a-2(a+a^2)=a-2a^2 \end{cases}$$

13.3 a) On calcule : $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -5y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-z \\ x-2z+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=-z \end{cases}$

13.3 b) On calcule : $\begin{cases} 3x-2y+z=6 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 4x=4 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2y-z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=2y+3 \end{cases}$

13.3 c) On calcule :

$$\begin{cases} x-y+3z=\dfrac{5}{2} \\ x+2y-z=\dfrac{3}{2} \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x-y+3z=\dfrac{5}{2} \\ 3y-4z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z \\ x=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z-3z+\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z \\ x=\dfrac{13}{6}-\dfrac{5}{3}z \end{cases}$$

13.3 d) On calcule :

$$\begin{cases} 5x+y+2z=-\dfrac{5}{2} \\ 2x-y+2z=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{5}{2}-5x-2z \\ 2x+\dfrac{5}{2}+5x+2z+2z=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+4z=-\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{-25}{6} \\ y=-\dfrac{5}{2}-5x-2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{-25}{24}-\dfrac{7}{4}x \\ y=-\dfrac{5}{2}-5x+\dfrac{25}{12}+\dfrac{7}{2}x=\dfrac{-5}{12}-\dfrac{3}{2}x \end{cases}$$

13.4 a) On calcule :

$$\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y+2z=11 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1}}{\iff} \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ -5y+5z=20 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3-L_2}{\iff} \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ 2z=6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=3 \\ x+2y-3=-3 \\ -5y+3\times 3=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ x+2y=0 \\ -5y=14-9=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ y=-1 \\ x=-2y=2 \end{cases}$$

13.4 b) On calcule :

$$\begin{cases} a-b-c=-7 \\ 3a+2b-c=3 \\ 4a+b+2c=4 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-4L_1}}{\iff} \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 5b+6c=32 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3-L_2}{\iff} \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 4c=8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c=2 \\ a-b-2=-7 \\ 5b+2\times 2=24 \end{cases} \iff \begin{cases} c=2 \\ b=4 \\ a=-5+4=-1 \end{cases}$$

13.4 c) On calcule : $\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+10y+z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 7y=-1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{\iff} \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 0=-4 \end{cases}$.

Le système est incompatible car l'équation $0=-4$ n'a pas de solution.

13.4 d) On va extraire y de la deuxième équation, puis résoudre par substitution. On calcule :

$$\begin{cases} 3x+2y+3z=0 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 4x+5y+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ 3x+4x+4z+2+3z=0 \\ 4x+10x+10z+5+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ 7x+7z=-2 \\ 14x+14z=-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ x=-z-\dfrac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z-\dfrac{2}{7} \\ y=-2z-\dfrac{4}{7}+2z+1=\dfrac{3}{7} \end{cases}$$

13.5 a) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y=2 \\ 2x+2z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ 2-2y+y-z=1 \\ 4-4y+2z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ -y-z=-1 \\ -4y+2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ y=1-z \\ -4+4z+2z=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ y=1-z \\ 6z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3/6=1/2 \\ y=1-1/2=1/2 \\ x=2-1=1 \end{cases}$$

13.5 b) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y-2z=2 \\ 2x-2y+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ -4y+4z=1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+4L_2}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ 0=5 \end{cases}$$

Le système est incompatible car l'équation $0=5$ n'a pas de solution.

13.5 c) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 \\ y+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-4z \\ x=-(1-4z)+z+1=5z-1+1=5z \end{cases}.$$

13.5 d) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (a-2)y+4z=1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+(2-a)L_2}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (4+(2-a)(a+1))z=3-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (4+a+2-a^2)z=3-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (-a^2+a+6)z=3-a \end{cases}$$

On factorise le trinôme $-(a^2-a-6)=-(a+2)(a-3)$ qui est non nul dans le cas étudié.

D'où : $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (-a^2+a+6)z=3-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{3-a}{-(a+2)(a-3)}=\dfrac{1}{a+2} \\ y=1-(a+1)\times\dfrac{1}{a+2} \\ x=1-y+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{1}{a+2} \\ y=\dfrac{a+2-a-1}{a+2}=\dfrac{1}{a+2} \\ x=1-\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{a+2}=1 \end{cases}$

13.6 a) On calcule :

$$\begin{cases} x-2z=7 \\ 2x-y=7 \\ 2y-z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+2z \\ 14+4z-y=7 \\ 2y-z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+2z \\ y=7+4z \\ 14+8z-z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+2z \\ y=7+4z \\ 7z=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-1 \\ y=7-4=3 \\ x=7-2=5 \end{cases}$$

13.6 b) On calcule :

$$\begin{cases} x-z=2 \\ x-y=2 \\ y-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+z \\ 2+z-y=2 \\ y-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+z \\ y=z \\ 0=2 \end{cases}$$

Le système est incompatible car l'équation $0=2$ n'a pas de solution.

13.6 c) On calcule :

$$\begin{cases} x-az=c \\ a\,x-y=c \\ a\,y-z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=c+az \\ a(c+az)-y=c \\ a\,y-z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ a\big((a-1)c+a^2z\big)-z=c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ (a^3-1)z=(1+a-a^2)c \end{cases}$$

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $a^3-1=0$ a pour unique solution $a=1$ (fonction $t\mapsto t^3$ strictement croissante). Or $a\neq 1$, donc $a^3-1\neq 0$, on peut déterminer z dans la troisième équation.

$$\begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ (a^3-1)z=(1+a-a^2)c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=c\dfrac{-a^2+a+1}{(a-1)(a^2+a+1}=\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c \\ y=(a-1)c+a^2\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c=\dfrac{a^2-a+1}{a^3-1}c \\ x=c+a\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c=\dfrac{a^2+a-1}{a^3-1}c \end{cases}$$

13.7 a) On calcule :

$$\begin{cases} 4x+y+z=x \\ x+4y+z=y \\ x+y+4z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y+z=0 \\ x+3y+z=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-3x-y \\ x+3y-3x-y=0 \\ x+y+3\times(-3x-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-3x-y \\ x=y \\ -10x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=z=0$$

13.7 b) On calcule : $\begin{cases} 4x+y+z=3x \\ x+4y+z=3y \\ x+y+4z=3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow z=-x-y$

13.7 c) On calcule :

$$\begin{cases} 4x+y+z=6x \\ x+4y+z=6y \\ x+y+4z=6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x-y \\ x-2y+2x-y=0 \\ x+y-2\times(2x-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x-y \\ 3x-3y=0 \\ -3x+3y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=2x-x=x \end{cases}$$

Fiche n° 14. Nombres complexes

Réponses

14.1 a) .... $\boxed{4+32\mathrm{i}}$	**14.1** g) ..... $\boxed{\dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}}$	**14.2** c) .... $\boxed{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$	**14.2** h) $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$
14.1 b) .... $\boxed{13-\mathrm{i}}$	**14.1** h) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$	**14.2** d) .... $\boxed{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$	**14.3** a) .... $\boxed{1}$
14.1 c) .... $\boxed{7-24\mathrm{i}}$	**14.2** a) .... $\boxed{12}$	**14.2** e) .... $\boxed{2e^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}}$	**14.3** b) ... $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$
14.1 d) .... $\boxed{5}$	**14.2** b) .... $\boxed{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$	**14.2** f) ..... $\boxed{5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$	**14.3** c) .. $\boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$
14.1 e) .. $\boxed{-119+120\mathrm{i}}$		**14.2** g) .... $\boxed{10\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}$	
14.1 f) ..... $\boxed{\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}}$			

Corrigés

14.1 a) On développe : $(2+6\mathrm{i})(5+\mathrm{i}) = 10+2\mathrm{i}+30\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2 = 10+32\mathrm{i}-6 = 4+32\mathrm{i}$.

14.1 b) On développe : $(3-\mathrm{i})(4+\mathrm{i}) = 12+3\mathrm{i}-4\mathrm{i}-\mathrm{i}^2 = 12-\mathrm{i}+1 = 13-\mathrm{i}$.

14.1 c) On développe : $(4-3\mathrm{i})^2 = 4^2 - 2\times 4\times 3\mathrm{i} + (3\mathrm{i})^2 = 16-24\mathrm{i}-9 = 7-24\mathrm{i}$

14.1 d) On développe : $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2-(2\mathrm{i})^2 = 1+4 = 5$.

Ou bien : en posant $z = 1-2\mathrm{i}$, on reconnaît la quantité $z\bar{z}$, c'est-à-dire $|z|^2$. Ainsi, $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2+2^2 = 5$.

14.1 e) On développe :

$(2-3\mathrm{i})^4 = \big((2-3\mathrm{i})^2\big)^2 = (4-2\times 2\times 3\mathrm{i}-9)^2 = (-5-12\mathrm{i})^2 = (5+12\mathrm{i})^2 = 5^2+2\times 5\times 12\mathrm{i}-12^2 = -119+120\mathrm{i}$.
Ou bien : avec la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(2-3\mathrm{i})^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}2^k(-3\mathrm{i})^{4-k}\\ &= (-3\mathrm{i})^4 + 4\times 2\times(-3\mathrm{i})^3 + 6\times 2^2\times(-3\mathrm{i})^2 + 4\times 2^3\times(-3\mathrm{i}) + 2^4\\ &= 81+216i-216-96\mathrm{i}+16 = -119+120\mathrm{i}.\end{aligned}$$

14.1 f) On utilise l'expression conjuguée : $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{3^2+1^2} = \dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}$

14.1 g) On utilise l'expression conjuguée et on développe :

$\dfrac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}} = \dfrac{(2-3\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}{(5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})} = \dfrac{10-4\mathrm{i}-15\mathrm{i}-6}{5^2+2^2} = \dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}$.

14.1 h) On utilise la définition de l'écriture exponentielle et la trigonométrie :

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

14.2 a) On a $|12| = 12$ et $\arg(12) = 0$, donc la réponse est 12 (ou $12\mathrm{e}^{0\mathrm{i}}$).

14.2 b) On a $|-8| = 8$ et $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

14.2 c) On a $|\sqrt{3}\mathrm{i}| = \sqrt{3}$ et $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

....

14.2 d) On a $|-2\mathrm{i}| = 2$ et $-\mathrm{i} = \bar{\mathrm{i}} = \overline{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$.

....

14.2 e) On écrit que $-2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et on utilise les propriétés de l'exponentielle :

$-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$.

....

14.2 f) On calcule $|5-5\mathrm{i}| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{2\times 5^2} = 5\sqrt{2}$ et on écrit

$5-5\mathrm{i} = 5\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

....

14.2 g) On calcule $|-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{25+75} = 10$ puis on écrit

$-5+5\mathrm{i}\sqrt{3} = 10\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$.

....

14.2 h) On écrit que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right| = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ $\left(\text{car } \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \geqslant 0 \text{ et } \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right| = 1\right)$ et $\arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right) = \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

On en déduit que l'écriture exponentielle de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ est $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

....

14.3 a) On remarque que le dénominateur de z est le conjugué du numérateur. Ainsi, $|z| = 1$.

....

14.3 b) De plus, en multipliant par le conjugué, on obtient

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})^2}{(1+\sqrt{2}-\mathrm{i})(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 + 2(1+\sqrt{2})\mathrm{i} - 1}{(1+\sqrt{2})^2+1} = \frac{1+2\sqrt{2}+2+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}-1}{1+2\sqrt{2}+2+1} \\ &= \frac{2+2\sqrt{2}+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}}{4+2\sqrt{2}} = \frac{2(1+\sqrt{2})(1+\mathrm{i})}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

....

14.3 c) Enfin, $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc $z^{2021} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{2021} = \mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi}$.

Comme $2021 = 4\times 505+1$, on a $\mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi+\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

....

Fiche n° 15. Sommes et produits

Réponses

15.1 a) .... $\boxed{n(n+2)}$

15.1 b) .... $\boxed{\dfrac{7(n+1)(n+4)}{2}}$

15.1 c) .... $\boxed{\dfrac{n(5n+1)}{2}}$

15.1 d)......... $\boxed{\dfrac{(n-2)(n-7)}{6}}$

15.2 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

15.2 b)... $\boxed{n(n+1)(n^2+n+4)}$

15.2 c) .... $\boxed{\dfrac{9}{2}(3^{n-2}-1)}$

15.2 d)........... $\boxed{\dfrac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}}$

15.2 e)... $\boxed{\dfrac{7}{6}(7^n-1)+n(n+4)}$

15.2 f) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

15.3 a)................. $\boxed{2^{q-p+1}}$

15.3 b) .... $\boxed{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

15.3 c)................ $\boxed{5^n(n!)^{\frac{3}{2}}}$

15.3 d) .... $\boxed{0}$

15.4 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}}$

15.4 b) .... $\boxed{0}$

15.4 c)...... $\boxed{n2^{n+1}+2(1-2^n)}$

15.4 d) .... $\boxed{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$

15.5 a) .... $\boxed{(n+3)^3-2^3}$

15.5 b) .... $\boxed{\ln(n+1)}$

15.5 c) .... $\boxed{1-\dfrac{1}{(n+1)!}}$

15.5 d)........... $\boxed{(n+1)!-1}$

15.6 a) .... $\boxed{n+1}$

15.6 b)................ $\boxed{1-4n^2}$

15.6 c)...................... $\boxed{\dfrac{1}{n}}$

15.6 d) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

15.7 a).............. $\boxed{1-\dfrac{1}{n+1}}$

15.7 b)............. $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+3}}$

15.8 a)................ $\boxed{2n^2+n}$

15.8 b) .... $\boxed{\dfrac{n(3n+1)}{2}}$

15.9 a) .... $\boxed{\dfrac{n^2(n+1)}{2}}$

15.9 b) .... $\boxed{\dfrac{n(n+3)}{4}}$

15.9 c).............. $\boxed{\dfrac{n(n^2-1)}{2}}$

15.9 d) .. $\boxed{\dfrac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}}$

15.9 e)......... $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}\ln(n!)}$

15.9 f)....... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}}$

Corrigés

15.1 a) On utilise la formule suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n = n\sum_{k=1}^{n+2} 1 = (n+2-1+1)\times n = n(n+2)$.

....

15.1 b) On utilise la formule présente en prérequis : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k = 7\times\frac{(n+2-2+1)(n+2+2)}{2} = \frac{7(n+1)(n+4)}{2}$.

....

15.1 c) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+n-1) = 3\sum_{k=1}^{n}k + (n-1)\sum_{k=1}^{n}1 = \frac{3n(n+1)}{2} + n(n-1) = \frac{n(5n+1)}{2}.$$

....

15.1 d) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{k-4}{3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n-1}(k-4) = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=2}^{n-1}k \;-\; 4\sum_{k=2}^{n-1}1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{(n-2)(n+1)}{2} - 4(n-2)\right) = \frac{(n-2)(n-7)}{6}.$$

....

15.2 a) On développe et utilise la linéarité de la somme $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$.

Puis, on utilise la formule suivante : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. D'où $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

15.2 b) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n}\big(4k(k^2+2)\big) = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 8\sum_{k=0}^{n} k = 4\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 8\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)(n(n+1)+4) = n(n+1)(n^2+n+4).$$

15.2 c) On utilise la formule pour les sommes géométriques : on a $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k = 3^2\frac{1-3^{n-1-2+1}}{1-3} = \frac{9}{2}(3^{n-2}-1)$.

15.2 d) On factorise pour faire apparaître une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k} = 5^n \sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{-k} = 5^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^k = 5^n \frac{1-(\frac{2}{5})^{n-0+1}}{1-\frac{2}{5}} = 5^{n+1}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3} = \frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}.$$

15.2 e) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(7^k + 4k - n + 2) = \sum_{k=1}^{n} 7^k + 4\sum_{k=1}^{n} k + (-n+2)\sum_{k=1}^{n} 1 = 7\frac{7^n-1}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + (-n+2)n = \frac{7}{6}(7^n-1) + n + 4.$$

15.2 f) On utilise la formule suivante : $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2n}$.

15.3 a) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=p}^{q} 2 = 2 \times \cdots \times 2 = 2^{q-p+1}$.

15.3 b) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=1}^{n} 3^k = 3^1 \times 3^2 \times \cdots \times 3^n = 3^{1+\cdots+n} = 3^{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

15.3 c) On factorise et on utilise que $\sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}}$: on a

$$\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k} \times k = 5^n \prod_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{2}} = 5^n \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{\frac{3}{2}} = 5^n (n!)^{\frac{3}{2}}.$$

15.3 d) Un produit est nul si l'un des termes est nul.

15.4 a) Avec ce changement ou renversement, on a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a $\sum_{k=1}^{n} n+1-k = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

15.4 b) On utilise la linéarité de la somme et on effectue ce changement ou renversement dans la seconde. On a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

15.4 c) Avec le changement d'indice, on a, en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$:

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)2^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} j2^{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2\sum_{j=0}^{n-1} j2^j + 2\sum_{j=0}^{n-1} 2^j$$
$$= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j2^j - n2^n\right] + 2\frac{1-2^n}{1-2} = 2S_n - n2^{n+1} - 2(1-2^n)$$

D'où $S_n = n2^{n+1} + 2(1-2^n) = (n-1)2^{n+1} + 2$.

15.4 d) On a $\sum_{k=3}^{n+2}(k-2)^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

15.5 a) On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=2}^{n+2}(k+1)^3 - k^3 = 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \dots + (n+3)^3 - (n+2)^3 = (n+3)^3 - 2^3.$$

15.5 b) On calcule :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(2) + \dots + \ln(n+1) - [\ln(1) + \dots + \ln(n)] = \ln(n+1).$$

15.5 c) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+1-1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

15.5 d) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)\times k! - k!] = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1.$$

15.6 a) On écrit $\prod_{k=1}^{n} \dfrac{k+1}{k} = \dfrac{2}{1} \times \dfrac{3}{2} \times \dots \times \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{n+1}{1} = n+1$.

15.6 b) Dans cet exemple, il faut aller un terme plus loin pour voir le télescopage :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-3} = \frac{3}{-1} \times \frac{5}{1} \times \frac{7}{3} \times \dots \times \frac{2(n-1)+1}{2(n-1)-3} \times \frac{2n+1}{2n-3}$$
$$= \frac{2(n-1)+1}{-1} \times \frac{2n+1}{1} = -(2n-2+1)(2n+1) = -(2n-1)(2n+1) = 1-4n^2.$$

15.6 c) En mettant au même dénominateur : $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\dfrac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\dfrac{k-1}{k}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dots \times \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{1}{n}$.

15.6 d) Il faut remarquer l'identité remarquable et faire deux produits télescopiques :

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} = \left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\right) \times \left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-1}{n}\right) \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

15.7 a) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, en reconnaissant une somme télescopique.

15.7 b) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{1}{(k+2)(k+3)} = \dfrac{a}{k+2} + \dfrac{b}{k+3}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}$, en reconnaissant une somme télescopique.

15.8 a) Séparons les termes d'indices pairs et impairs. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2 &= \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} (-1)^k k^2 + \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} (-1)^k k^2 = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} k^2 + \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} (-1) k^2 \\
&= \sum_{p=0}^{n} (2p)^2 - \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1)^2 = \sum_{p=0}^{n} 4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} \big(4p^2 + 4p + 1\big) \\
&= \underbrace{4\sum_{p=0}^{n} p^2 - 4\sum_{p=0}^{n-1} p^2}_{=4n^2} - 4\sum_{p=0}^{n-1} p - \sum_{p=0}^{n-1} 1 = 4n^2 - 4\frac{n(n-1)}{2} - n = 2n^2 + n.
\end{aligned}$$

15.8 b) Séparons les termes plus petits que n et les autres. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} \min(k,n) &= \sum_{k=0}^{n} \min(k,n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \min(k,n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} n = \frac{n(n+1)}{2} + n[2n - (n+1) + 1] = \frac{n(n+1)}{2} + n^2 = \frac{n(3n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

15.9 a) Comme il n'y a que l'indice j dans la somme, nous pouvons factoriser :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} j = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{n(n+1)}{2} n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

15.9 b) On somme d'abord sur l'indice i ; on calcule donc

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (j+1) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Signalons, qu'en revanche, l'autre ordre de sommation ne permettait pas de conclure.

15.9 c) Il faut faire attention à l'inégalité stricte :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i+j) &= \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} (i+j) = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j\right) = \sum_{j=2}^{n} \left[\frac{j(j-1)}{2} + j(j-1)\right] \\
&= \sum_{j=2}^{n} \left[\frac{3}{2}(j^2 - j)\right] = \frac{3}{2}\left(\sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j^2\right) = \frac{3}{2}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right) - 1 - \left(\sum_{j=1}^{n} j\right) + 1\right] \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{3n(n+1)(2n+1-3)}{3 \times 2 \times 2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{2}.
\end{aligned}$$

15.9 d) On développe d'abord puis on choisit l'ordre de sommation qui semble faciliter les calculs :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j)^2 &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i^2+2ij+j^2) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i^2 + 2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} i^2\right) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} ij\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} j^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2\sum_{j=i}^{n} 1\right) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j} i\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(j^2\sum_{i=1}^{j} 1\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2(n-i+1) + 2\sum_{j=1}^{n} j\frac{j(j+1)}{2} + \sum_{j=1}^{n} j^3 = \sum_{i=1}^{n}\big[i^2(n+1)-i^3\big] + \sum_{j=1}^{n}(j^3+j^2) + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= (n+2)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}.
\end{aligned}$$

15.9 e) On calcule :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\ln(i^j) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j\ln(i) = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(i)\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln(n!).$$

15.9 f) On fait une sommation par paquets :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j) &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\max(i,j) + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\max(i,j) + \sum_{1\leqslant j=i\leqslant n}\max(i,j) \\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} i + \sum_{i=1}^{n} i \\
&= 2\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{par symétrie} \\
&= 2\sum_{j=2}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} = 2\sum_{j=1}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j\right] + \frac{n(n+1)}{2} = 2\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{6}(4n+2-6+3) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Fiche n° 16. Coefficients binomiaux

Réponses

16.1 a) .... $\boxed{10\,100}$

16.1 b) .... $\boxed{720}$

16.1 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{30}}$

16.1 d) .... $\boxed{15}$

16.1 e) .... $\boxed{56}$

16.1 f) .... $\boxed{140}$

16.2 a) .... $\boxed{\dfrac{9!}{5!}}$

16.2 b) .... $\boxed{\dbinom{9}{4}}$

16.2 c) .... $\boxed{2^n \times n!}$

16.2 d) .... $\boxed{\dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}}$

16.3 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

16.3 b) .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

16.3 c) .... $\boxed{\dfrac{k+1}{n-k}}$

16.3 d) .... $\boxed{(n+2)(n+1)}$

16.3 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{(n+1)!}}$

16.3 f) .... $\boxed{\dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}}$

16.4 a) .... $\boxed{\dfrac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}}$

16.4 b) .... $\boxed{\dfrac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}}$

16.5 a) .... $\boxed{3^n}$

16.5 b) .... $\boxed{0}$

16.5 c) .... $\boxed{6^n}$

16.5 d) .... $\boxed{12 \times 15^n}$

16.6 a) .... $\boxed{2 \times \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}}$

16.6 b) .... $\boxed{2^{n-1}}$

16.7 a) .... $\boxed{2^n}$

16.7 b) .... $\boxed{n2^{n-1}}$

16.7 c) .... $\boxed{n(n+1)2^{n-2}}$

16.7 d) .... $\boxed{\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}}$

16.8 a) .... $\boxed{\dbinom{2n}{n}}$

16.8 b) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2}$

16.8 c) .... $\boxed{\dbinom{2n}{n}}$

Corrigés

16.1 a) On calcule : $\dfrac{101!}{99!} = \dfrac{101 \times 100!}{99!} = \dfrac{101 \times 100 \times 99!}{99!} = 101 \times 100 = 10100.$

....

16.1 b) On calcule : $\dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720.$

....

16.1 c) On calcule : $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5}{5 \times 4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5-1}{5!} = \dfrac{4}{5!} = \dfrac{4}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = \dfrac{1}{30}.$

....

16.1 d) On calcule : $\dbinom{6}{2} = \dfrac{6!}{2! \times 4!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15.$

....

16.1 e) On calcule : $\dbinom{8}{3} = \dfrac{8!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{2 \times 3} = 8 \times 7 = 56.$

....

16.1 f) On calcule : $4 \times \dbinom{7}{4} = 4 \times \dfrac{7!}{4! \times 3!} = \dfrac{4 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{4 \times 3! \times 3!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 3} = 140.$

....

16.2 a) Par définition, $9! = (2 \times 3 \times 4 \times 5) \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 5! \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$. Donc, $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$.

....

16.2 b) Comme pour le calcul précédent, on a $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$. Or, $2 \times 3 \times 4 = 4!$. Ainsi,

$$\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4} = \frac{9!}{5!} \times \frac{1}{4!} = \binom{9}{4} = \binom{9}{5}.$$

....

16.2 c) On peut mettre 2 en facteur de chaque nombre du produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$, produit qui contient n facteurs. Ainsi,

$$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n) = 2^n \times n!.$$

16.2 d) On multiplie le produit $3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)$ par le produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$ de la question précédente.

On obtient ainsi le produit de tous les entiers compris entre 2 et $(2n+1)$. Il s'agit donc de $(2n+1)!$.

Donc, on a

$$3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}.$$

16.3 a) Par définition, $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n!}{2! \times (n-2)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2! \times (n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

16.3 b) Par définition, $\dbinom{n}{3} = \dfrac{n!}{3! \times (n-3)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{3! \times (n-3)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

16.3 c) On calcule

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} &= \frac{\frac{n!}{k! \times (n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)! \times (n-(k+1))!}} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \times \frac{(k+1)! \times (n-(k+1))!}{n!} \\ &= \frac{(k+1) \times k! \times (n-k-1)!}{k! \times (n-k) \times (n-k-1)!} = \frac{k+1}{n-k}.\end{aligned}$$

16.3 d) On calcule $\dfrac{(n+2)!}{n!} = \dfrac{(n+2) \times (n+1) \times n!}{n!} = (n+2)(n+1)$.

16.3 e) On réduit au même dénominateur $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{n+1}{(n+1) \times n!} - \dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)-n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

16.3 f) On réduit au même dénominateur

$$\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} = \frac{(n+1)!}{2^{2n+2}} - \frac{2^2 \times n!}{2^2 \times 2^{2n}} = \frac{(n+1)! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{(n+1) \times n! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}.$$

16.4 a) On met chaque terme au même dénominateur, à savoir $2n(n+2)!$) :

$$\frac{1}{n!} = \frac{2n(n+1)(n+2)}{n! \times 2n(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{2n \times (n+1)!} = \frac{n+2}{2n \times (n+1)! \times (n+2)}$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{2 \times (n+2)!} = \frac{n}{2 \times (n+2)! \times n}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} &= \frac{2n(n+1)(n+2) + n + 2 + n}{2n \times (n+2)!} \\ &= \frac{2(n+1)(n(n+2)+1)}{2n \times (n+2)!} = \frac{(n+1)(n^2+2n+1)}{n(n+2)!}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} = \frac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}.$$

16.4 b) On a

$$\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3} = \frac{(3n+3)!}{a^{3n+3} \times ((n+1)!)^3} \times \frac{a^{3n} \times (n!)^3}{(3n)!}.$$

Or,

$$\begin{aligned}(3n+3)! &= (3n+3) \times (3n+2) \times (3n+1) \times (3n)! \\ a^{3n+3} &= a^{3n} \times a^3 \\ ((n+1)!)^3 &= ((n+1) \times n!)^3 = (n+1)^3 \times (n!)^3.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3} &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{a^3 \times (n+1)^3} \\ &= \frac{3(n+1)(3n+2)(3n+1)}{a^3 \times (n+1)^3} = \frac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}.\end{aligned}$$

16.5 a) On constate que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \times 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$.

16.5 b) On constate que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1) \times \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = -1 \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = (-1) \times (-1+1)^n = 0.$$

16.5 c) On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} 2^n \times 2^{n-k} \binom{n}{k} = 2^n \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \times 1^k = 2^n \times (1+2)^n = 2^n \times 3^n = 6^n$.

16.5 d) On calcule

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1} &= \sum_{k=0}^{n} 2^2 \times 2^k \times \binom{n}{k} \times 3^{n+1} \times 3^{n-k} \\ &= 4 \times 3^{n+1} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \times 3^{n-k} \\ &= 4 \times 3^{n+1} \times (2+3)^n = 4 \times 3^{n+1} \times 5^n = 4 \times 3 \times 3^n \times 5^n = 12 \times 15^n.\end{aligned}$$

16.6 a) On développe $\displaystyle(1+1)^n + (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+(-1)^k)$.

Or, $1+(-1)^k = 2$ si k est pair et $1+(-1)^k = 0$ si k est impair. Ainsi, on notant $P = \{k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant k \leqslant n \text{ et } k \text{ pair}\}$, on a

$$(1+1)^n + (1-1)^n = \sum_{k \in P} \binom{n}{k} \times 2 = 2 \times \sum_{k \in P} \binom{n}{k}.$$

Or, si $k \in P$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2p$. Comme $0 \leqslant k \leqslant n$, on a alors $0 \leqslant 2p \leqslant n$ et donc $0 \leqslant p \leqslant \dfrac{n}{2}$.

Comme $p \in \mathbb{N}$, on peut aussi écrire $0 \leqslant p \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Ainsi,

$$\sum_{k \in P} \binom{n}{k} = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} \quad \text{et} \quad (1+1)^n + (1-1)^n = 2 \times \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}.$$

16.6 b) On déduit de la première question que $\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} = \frac{1}{2}((1+1)^n + (1-1)^n) = 2^{n-1}$.

16.7 a) On développe $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. On évalue en $x = 1$ pour obtenir $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

16.7 b) On dérive par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k \times x^{k-1}$.

On évalue en $x = 1$ pour obtenir $n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k = n2^{n-1}$.

16.7 c) On dérive deux fois par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) \times x^{k-2}$.

On évalue en $x = 1$ pour obtenir $n(n-1)(1+1)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1)$. Ainsi, $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = n(n-1)2^{n-2}$.

Or, par linéarité, on a $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

16.7 d) On intègre entre 0 et x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. On obtient

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

On évalue en $x = 1$ pour obtenir

$$\frac{1}{n+1}(1+1)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

16.8 a) On développe $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$. Ainsi, le coefficient de x^n vaut $\binom{2n}{n}$.

16.8 b) On obtient une contribution en x^n dans le produit $(1+x)^n(1+x)^n$ à chaque fois que l'on multiplie un terme de la forme $a_k x^k$ dans le premier facteur avec un terme de la forme $b_{n-k}x^{n-k}$ dans le deuxième facteur, et ce pour toutes les valeurs de k entières naturelles et inférieures ou égales à n. Or, $(1+x)^n \times (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\right)$.

Donc, le coefficient de x^n vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

16.8 c) On déduit, en comparant les réponses aux questions précédentes, que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Fiche n° 17. Manipulation des fonctions usuelles

Réponses

17.1 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

17.1 b) .... $\boxed{2}$

17.1 c) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

17.1 d) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

17.1 e) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

17.1 f) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$

17.2 a) .... $\boxed{1}$

17.2 b) .... $\boxed{0}$

17.2 c) .... $\boxed{\dfrac{5}{4}}$

17.2 d) .... $\boxed{\dfrac{4}{3}}$

17.2 e) .... $\boxed{\dfrac{13}{12}}$

17.2 f) .... $\boxed{\dfrac{3}{5}}$

17.3 a) .... $\boxed{\operatorname{sh}(x+y)}$

17.3 b) .... $\boxed{\operatorname{ch}(x+y)}$

17.4 a) .... $\boxed{\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

17.4 b) .... $\boxed{1}$

17.4 c) .... $\boxed{-\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}}$

17.4 d) .... $\boxed{\dfrac{\ln(4)}{\ln(20/3)}}$

17.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}}$

17.5 b) .... $\boxed{\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}}$

17.5 c) .... $\boxed{1-\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

17.5 d) .... $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}}$

17.6 a) .... $\boxed{1}$

17.6 b) .... $\boxed{0}$

17.6 c) .... $\boxed{\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}}$

17.6 d) . $\boxed{\begin{array}{l}\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\\ \cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\end{array}}$

17.6 e) $\boxed{\begin{array}{l}\left\{\frac{1}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\\ \cup\left\{\pi-\frac{1}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\end{array}}$

17.6 f) .... $\boxed{1}$

17.7 a). $\boxed{\{\ln(\sqrt{5}-2);\ln(\sqrt{5}+2)\}}$

17.7 b)............ $\boxed{\ln(1+\sqrt{2})}$

17.7 c)................. $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(2)}$

17.7 d) . $\boxed{[-\ln(4+\sqrt{15}),\ln(4+\sqrt{15})]}$

17.7 e)..... $\boxed{\left[\ln(3+\sqrt{10}),+\infty\right[}$

17.7 f) .... $\boxed{\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\ln(3)\right]}$

17.8 a) ... $\boxed{x\mapsto \ln(2)\times 2^x+2x}$

17.8 b). $\boxed{x\mapsto \dfrac{15^x\ln(3/5)+3^x\ln(3)}{(5^x+1)^2}}$

17.8 c)...... $\boxed{x\mapsto (\ln(x)+1)x^x}$

17.8 d) . $\boxed{x\mapsto \dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos(x)^2}.}$

17.9 a) .... $\boxed{x\mapsto 2x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}}$

17.9 b) ... $\boxed{x\mapsto \operatorname{ch}^2(x)+\operatorname{sh}^2(x)}$

17.9 c) .... $\boxed{x\mapsto \dfrac{1-\operatorname{th}^2(x)}{1+\operatorname{th}^2(x)}}$

17.9 d).... $\boxed{x\mapsto \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(\operatorname{ch}(x))}$

17.10 a) .... $\boxed{x\mapsto 0}$

17.10 b) .... $\boxed{x\mapsto 0}$

17.11 a) $\boxed{x\mapsto (\ln(x)+1)x^x\mathrm{e}^{-x^{2x}}}$

17.11 b). $\boxed{x\mapsto \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)^2}\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(\operatorname{ch}(x))}}}$

17.11 c) .... $\boxed{x\mapsto \arcsin(x)}$

17.11 d)........ $\boxed{x\mapsto \arctan(x)}$

Corrigés

17.1 b) On calcule : $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\dfrac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}}=2.$

....

17.1 c) On remarque que $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}.$

....

17.1 d) On remarque que $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\arctan\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\dfrac{\pi}{6}.$

....

17.1 f) On remarque que $\arccos\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)=\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}.$

17.2 c) On calcule : $\mathrm{ch}(\ln(2)) = \dfrac{\mathrm{e}^{\ln(2)} + \mathrm{e}^{-\ln(2)}}{2} = \dfrac{2+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{5}{4}$.

17.2 d) On calcule : $\mathrm{sh}(\ln(3)) = \dfrac{\mathrm{e}^{\ln(3)} - \mathrm{e}^{-\ln(3)}}{2} = \dfrac{3-\frac{1}{3}}{2} = \dfrac{\frac{8}{3}}{2} = \dfrac{4}{3}$.

17.2 e) On calcule : $\mathrm{ch}(\ln(2/3)) = \dfrac{\mathrm{e}^{\ln(2/3)} + \mathrm{e}^{-\ln(2/3)}}{2} = \dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{\frac{13}{6}}{2} = \dfrac{13}{12}$.

17.2 f) On sait que $\mathrm{th}(\ln(2)) = \dfrac{\mathrm{e}^{\ln(2)} - \mathrm{e}^{-\ln(2)}}{\mathrm{e}^{\ln(2)} + \mathrm{e}^{-\ln(2)}} = \dfrac{2-\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{3}{5}$.

17.3 a) Développons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) + \mathrm{ch}(y)\mathrm{sh}(x) &= \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}) + (\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y})(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})}{4} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^{x-y} + \mathrm{e}^{y-x} - \mathrm{e}^{-(x+y)} + \mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^{y-x} + \mathrm{e}^{x-y} - \mathrm{e}^{-(x+y)}}{4} \\
&= \frac{2\mathrm{e}^{x+y} - 2\mathrm{e}^{-(x+y)}}{4} = \mathrm{sh}(x+y).
\end{aligned}$$

17.4 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $3^x = \dfrac{9^x}{2} \Leftrightarrow \ln(3^x) = \ln\left(\dfrac{9^x}{2}\right) \Leftrightarrow x\ln(3) = 2x\ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

17.4 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $4^x = 2 \times 2^x \Leftrightarrow 2x\ln(2) = (x+1)\ln(2) \Leftrightarrow 2x = x+1 \Leftrightarrow x = 1$.

17.4 c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors on a l'équivalence $2^x = 3.4^x \Leftrightarrow x\ln(2) = \ln(3) + 2x\ln(2) \Leftrightarrow x = -\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

17.4 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}} &\Leftrightarrow \ln(10^{2x}) = \ln(4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}) \Leftrightarrow 2x\ln(10) = \ln(4) + x\ln(5) + \frac{x}{2}\ln(9) \\
&\Leftrightarrow x\left(2\ln(5) + 2\ln(2) - \ln(5) - \frac{2\ln(3)}{2}\right) = \ln(4) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(4)}{2\ln(2) + \ln(5) - \ln(3)} = \frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}.
\end{aligned}$$

17.5 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 2^x$. Alors $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow X + X^2 - 4 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 16 = 17$, d'où deux racines, $\dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Seule la racine $\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$ est positive, donc $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{\sqrt{17}-1}{2} \Leftrightarrow$ $x\ln(2) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$.

17.5 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $X = 4^x$. Alors $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow 4^x = 1$ ou $4^x = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.

17.5 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.

Alors on a l'équivalence $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 3 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 \times 2 \times 3 = 25$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{1 \pm 5}{4}$, i.e. $\dfrac{3}{2}$ et -1. La seule solution positive est $\dfrac{3}{2}$, donc $2 \times 9^x - 3^x - 3 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

17.5 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.

Alors on a l'équivalence $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 = 5$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{-1 \pm 5}{2}$. La seule solution positive est $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, donc $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

17.6 a) Ici, pas de calcul : $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$ et, par stricte croissance de arcsin, l'unique solution est 1.

17.6 b) Soit $x \in [-1,1]$. Alors $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Mais comme arccos est à valeurs dans $[0,\pi]$, $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0$.

17.6 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\arccos(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

17.6 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

17.6 e) Ici, pas besoin de connaître $\sin\left(\dfrac{1}{3}\right)$! Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

17.6 f) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\tan(\arctan(x)) = 1 \Leftrightarrow \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1$.

17.7 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \mathrm{e}^x$. Alors on a les équivalences (comme $\mathrm{e}^x > 0$)

$$\mathrm{ch}(x) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow X^2 + 1 = 2\sqrt{5}X \Leftrightarrow X^2 - 2\sqrt{5}X + 1 = 0.$$

Il s'agit donc d'une équation du second degré, dont le discriminant est $20 - 4 = 16$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{2\sqrt{5} \pm 4}{2} = \sqrt{5} \pm 2$. Ces deux quantités sont positives, on a donc l'équivalence $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \sqrt{5} \pm 2 \Leftrightarrow x = \ln(\sqrt{5} \pm 2)$. Ainsi, les deux solutions sont $\{\ln(\sqrt{5}-2); \ln(\sqrt{5}+2)\}$

17.7 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \mathrm{e}^x$. Alors $\mathrm{sh}(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{X - \frac{1}{X}}{2} = 1 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 1 = 0$, de discriminant $4 + 4 = 8$, de solutions $\dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. La seule solution positive est $1 + \sqrt{2}$, donc $\mathrm{sh}(x) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \ln(1 + \sqrt{2})$.

17.7 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \mathrm{e}^x$. Alors $\mathrm{th}(x) = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow X^2 - 1 = \dfrac{1}{3}(X^2 + 1) \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}X^2 - \dfrac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow X^2 = 2 \Leftrightarrow X = \pm\sqrt{2}$. Ainsi, la seule solution positive étant $\sqrt{2}$, $\mathrm{th}(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln(2)$.

17.7 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \mathrm{e}^x$. Alors $\mathrm{ch}(x) \leqslant 4 \Leftrightarrow \dfrac{X + \frac{1}{X}}{2} \leqslant 4 \Leftrightarrow X^2 + 1 \leqslant 8X \Leftrightarrow X^2 - 8X + 1 \leqslant 0$. Ce polynôme du second degré a pour discriminant 60 et pour racines $\dfrac{8 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$. Les deux racines sont positives, donc $\mathrm{ch}(x) \leqslant 4 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{15}\mathrm{e}^x \leqslant 4 + \sqrt{15} \Leftrightarrow \ln(4 - \sqrt{15}) \leqslant x \leqslant \ln(4 + \sqrt{15})$. On remarque ensuite que $\dfrac{1}{4 - \sqrt{15}} = \dfrac{4 + \sqrt{15}}{(5 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})} = 4 + \sqrt{15}$.

17.7 e) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = \mathrm{e}^x$. Alors $\mathrm{sh}(x) \geqslant 3 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \leqslant 6 \Leftrightarrow X - \dfrac{1}{X} \leqslant 6 \Leftrightarrow X^2 - 6X - 1 \leqslant 0$. Ce trinôme du second degré a pour discriminant 40, et a donc pour racines $\dfrac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 3 \pm \sqrt{10}$. La première racine est négative, la seconde positive, et $X \geqslant 0$, donc $\mathrm{sh}(x) \geqslant 3 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 3 + \sqrt{10} \Leftrightarrow x \geqslant \ln(3 + \sqrt{10})$.

17.7 f) Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $X = \mathrm{e}^x$. Alors, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{th}(x) \leqslant \frac{1}{2} &\Longleftrightarrow \frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} \leqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} \leqslant \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow X^2 - 1 \leqslant \frac{X^2 + 1}{2} \Longleftrightarrow X^2 - 3 \leqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow X^2 \leqslant 3 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2x} \leqslant 3 \Longleftrightarrow x \leqslant \frac{1}{2}\ln(3).\end{aligned}$$

17.8 a) On n'oublie pas que $2^x = \mathrm{e}^{x\ln(2)}$. Donc la dérivée de $x \mapsto 2^x$ est $x \mapsto \ln(2).2^x$.

17.8 c) On écrit que $x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$. Ainsi la dérivée de la fonction est $x \mapsto (\ln(x) + 1)\mathrm{e}^{x\ln(x)}$.

17.8 d) On dérive un quotient : en notant f la fonction et si $x \in]-1, 1[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos(x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin(x)}{\arccos(x)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - x^2}\arccos(x)^2}.$$

17.9 a) On dérive une composée $x \mapsto 2x\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^4}}$.

17.9 c) Il s'agit de dériver th :

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2} = \frac{\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \frac{\mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2.$$

La suite se dérive comme la dérivée d'une composée.

17.10 a) La fonction est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$.

17.10 b) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2} + \dfrac{-1}{x^2}\dfrac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{1}{1 + x^2} - \dfrac{1}{x^2 + 1} = 0$.

17.11 a) Il s'agit de dériver une composée. La dérivée de cette fonction est $x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x F'(x^x) = (\ln(x) + 1)x^x\mathrm{e}^{-(x^x)^2} = (\ln(x) + 1)x^x\mathrm{e}^{-x^{2x}}$.

17.11 b) Il s'agit de dériver une composée. La dérivée de $x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$ est $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \mathrm{th}(x)$.

Donc, la dérivée de $x \mapsto F(\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))})$ est

$$x \longmapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\frac{1}{2\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))}}\mathrm{e}^{-\ln(\mathrm{ch}(x))} = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2}\frac{1}{2\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))}}$$
