Le Théorème de Noether

Exposé – Lycée Joffre

Julien Cortier

26 février 2021

Résumé

L'objectif de ces notes (en construction) est de donner une introduction à quelques aspects du Calcul Variationnel, motivé par des exemples issus de la physique (optique, mécanique) ou de la géométrie.

On souhaite minimiser une quantité, l'intégrale d'action, prenant en argument une courbe d'extrémités fixées et dont l'expression fait intervenir un lagrangien.

On prouve qu'une courbe donnée est extrémale pour l'action si et seulement si elle satisfait aux équations d'Euler-Lagrange.

Le Théorème de Noether fournit ensuite, à partir de symétries du lagrangien, des intégrales premières, constantes le long d'une courbe extrémale et permettant de progresser vers la résolution des équations d'Euler-Lagrange.

Ces techniques sont enfin réinvesties sur plusieurs exemples, notamment pour retrouver les géodésiques du demi-plan de Poincaré.

Table des matières

1 Motivations et définitions

Ces notes – encore incomplètes – et les exposés afférents sont destinés aux enseignants intéressés de mathématiques et de physique et à des étudiants possédant un niveau L3 ou de fin de 2ème année de CPGE. On suppose ainsi connus les éléments du calcul différentiel à plusieurs variables. Le texte qui suit a été largement inspiré par les notes de cours de Pierre PANSU[4] et en partie par les ouvrages de Jean-Pierre BOURGUIGNON[1] et de Bernard DACOROGNA[2].

Remerciements *Tous mes remerciements vont à Guillaume Bulteau pour l'organisation de ce rendez-vous d'exposés, à l'administration du Lycée Joffre pour la réservation des salles, ainsi qu'aux participants (professeurs et élèves) pour leurs questions et commentaires ayant permis d'améliorer ces notes.*

Tout commentaire est bienvenu et peut m'être adressé à `julien-jean.cortier@ac-montpellier.fr`.

Repères historiques Grands noms à retenir, dans l'ordre chronologique (liste non-exhaustive) :

- Fermat (*Principe éponyme*)
- Maupertuis (*Première formulation du principe de moindre action*)
- Bernouilli, Jean (*résout le problème de la brachistochrone*)
- Lagrange (*pose les bases du calcul variationnel*)
- Hamilton (*introduit le formalisme Hamiltonien*)
- Noether (*relie les symétries d'un lagrangien avec les constantes du mouvement le long d'une extrémale*)
- Quelques autres noms : Euler, Jacobi, Weierstrass, Dubois-Reymond...

On décrit d'abord quelques situations issues de la physique ou de la géométrie relevant du *calcul variationnel.*

1.1 Principe de Fermat

Il peut s'énoncer de la manière suivante :

« ***Entre deux points, la lumière suit un chemin minimisant (localement) le temps de parcours*** »

Afin de traduire ce principe, on fixe deux points A et B et on considère un chemin reliant ces deux points, c'est-à-dire une application $q : [0,1] \to U$ (où U est une partie du plan, de l'espace ou d'un objet géométrique plus général tel qu'une *variété*), telle que $q(0) = A$ et $q(1) = B$.

La durée du trajet de la lumière de long du chemin q s'écrit

$$T(q) = \int_q \frac{\mathrm{d}s}{v} ,$$

où $\mathrm{d}s$ désigne l'élément de longueur infinitésimale le long du chemin q et v la vitesse.

Prosaïquement, cette quantité s'interprète comme la « somme des durées infinitésimales mises par la lumière pour parcourir ces longueurs infinitésimales à la vitesse v ».

La vitesse de la lumière v varie selon le milieu (supposé transparent et isotrope) dans lequel elle se propage, selon la formule

$$v(q) = \frac{c}{n(q)} \text{ , où } n(q) \text{ désigne l'\textit{indice optique au point} } q ,$$

et où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide.

Dans le cas où q est de classe $\mathcal{C}^1$, on note $\dot{q}(t) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ le vecteur vitesse tangent à la courbe q au point $q(t)$ (voir la figure ci-dessous). L'élément de longueur est alors $\mathrm{d}s = \|\dot{q}(t)\|\,\mathrm{d}t$.

On lit ainsi (en supposant que la paramétrisation $t \mapsto q(t)$ n'admet pas de point stationnaire) :

$$T(q) = \frac{1}{c}\int_0^1 n(q(t))\|\dot{q}(t)\|\,\mathrm{d}t\,.$$

L'application du principe de Fermat nous pousse donc à minimiser $T(q)$ parmi tous les chemins q reliant A et B.

Exemple 1.1. *Loi de Snell-Descartes :* $n_1\sin(i_1) = n_2\sin(i_2)$

Remarque 1.1. *Un conflit de notation est apparu ci-dessus et reviendra encore :* q *désigne en effet tantôt le chemin (application* $t \mapsto q(t)$*), tantôt le point ou vecteur position dans* U*.*

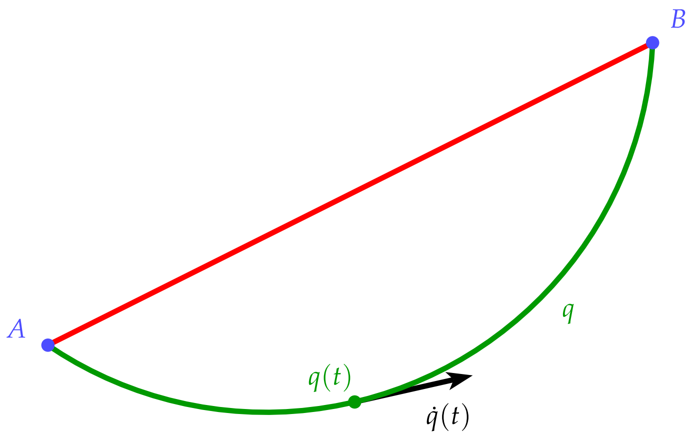
Ces notations sont malgré tout usuelles et ont leurs avantages, nous choisissons donc de les conserver dans la suite en espérant qu'elles ne suscitent pas de confusion.

1.2 Plus courts chemins, géodésiques

1.2.1 Géométrie euclidienne dans le plan

Si A et B sont deux points du plan affine euclidien et $q : [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (x(t), y(t))$ un chemin $\mathcal{C}^1$ entre A et B, sa longueur est :

$$\mathrm{Long}(q) := \int_0^1 \|\dot{q}(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$



Remarque 1.2. *La longueur obtenue dépend* a priori *de la paramétrisation du chemin* q *! Mais ce n'est en réalité pas le cas pour toutes les paramétrisations n'admettant pas de point stationnaire (c'est-à-dire que* $\dot{q}$ *ne s'annule pas).*

Pour s'en convaincre, il suffit de considérer un $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme strictement croissant* $u : [0,1] \to [0,1]$ *et le chemin* $\tilde{q} := q \circ u$*.*

On trouve bien $\mathrm{Long}(\tilde{q}) = \mathrm{Long}(q)$ *dans ce cas.*

Exercice 1.1. *Vérifier ceci à l'aide d'un changement de variable dans l'intégrale.*

La minimisation de la *fonctionnelle* « Long » parmi tous ces chemins d'extrémités fixées se fait sans difficulté par inégalité triangulaire, le minimum $\|\overrightarrow{AB}\|$ étant réalisé pour tout chemin $\mathcal{C}^1$, sans point stationnaire ($\dot{q}$ ne s'annule pas), décrivant le segment $[A, B]$.

1.2.2 Un exemple de géométrie non-euclidienne : le demi-plan de Poincaré

On considère le *demi-plan de Poincaré* $\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > 0\}$, muni de la *métrique riemannienne* $g = \dfrac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$, c'est-à-dire que l'élément de longueur est $\mathrm{d}s = \dfrac{1}{y}\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$.

Étant donné deux points A et B de $\mathbb{H}$, la *longueur de Poincaré* d'un chemin q $\mathcal{C}^1$ les reliant est :

$$L_{\mathbb{H}}(q) = \int_q \mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{\|\dot{q}(t)\|}{y(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}{y(t)}\,\mathrm{d}t\,,$$

où $q : t \mapsto (x(t), y(t))$.

Définition 1.1. *On appelle* ***arc de géodésique de*** $\mathbb{H}$ ***entre*** A ***et*** B *tout chemin rendant extrémale la fonctionnelle* $L_{\mathbb{H}}$ *ci-dessus.*

On cherche à déterminer l'*arc de géodésique*, c'est-à-dire le chemin de plus petite longueur les reliant.

Remarque 1.3. *Une autre fonctionnelle naturelle à minimiser est la* fonctionnelle d'énergie *:*

$$E_{\mathbb{H}}(q) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\|\dot{q}(t)\|^2}{y^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

On peut vérifier que les extrémales de $\mathbb{H}$ *sont les arcs de géodésiques (extrémales de* $L_{\mathbb{H}}$ *parcourues à vitesse constante).*

Tous les exemples ci-dessus ont en commun leur formulation à l'aide d'une fonctionnelle définie sur un espace de chemins reliant deux points fixés.

2 Formalisme lagrangien

2.1 Lagrangien, position du problème

De manière générale, étant donnés deux points A et B d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, on cherche à minimiser la fonctionnelle d'*action* :

$$S(q) = \int_0^1 \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)\,\mathrm{d}t\,,$$

où $q : [0,1] \to U$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $q(0) = A$ et $q(1) = B$, et où $\mathcal{L} : U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un fonction lisse, appelée **Lagrangien**.

Dans l'exemple précédent, le problème des géodésiques dans $\mathbb{H}$ consiste à minimiser l'action associée au Lagrangien donné par

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{y} = \frac{\|\dot{q}\|}{y}$$

où $q = (x, y)$.

Remarque 2.1. *Attention aux notations trompeuses... q et $\dot{q}$ désignent ici respectivement un point de U et un vecteur de $\mathbb{R}^n$, mais il n'est pas question ici de dérivée de q par rapport au temps.*

Si on préfère, on peut noter $\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}) = \dfrac{\|\vec{v}\|}{x_2}$, où $\vec{x} = (x_1, x_2)$.

Ce dernier exemple de lagrangien pose toutefois problème dans la mesure où $\vec{v} \mapsto \|\vec{v}\|$ n'est pas lisse en $\vec{0}$, ce qui pousse à considérer plutôt le Lagrangien d'énergie associée :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2y^2} = \frac{\|\dot{q}\|^2}{2y^2}\,.$$

On notera dans tout ce qui suit $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$ et $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ les gradients de $\mathcal{L}$ par rapport au premier (resp. au deuxième) argument dans $\mathbb{R}^n$.

2.2 Minimisation, équations d'Euler-Lagrange

Le but est de discuter l'existence et la valeur de

$$\inf_{q\in\mathcal{C}} S(q)\ ,$$

où $\mathcal{C}$ est l'espace des courbes $q : [0,1] \to U$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $q(0) = A$ et $q(1) = B$.

On commence par étudier la différentiabilité de S.

Définition 2.1. *Soit $q \in \mathcal{C}$. Une **variation de** q est une famille $(q_s)_{s\in]-\varepsilon,\varepsilon[}$ de courbes de $\mathcal{C}$ telles que :*

$$q_0 = q \ \text{ et } \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(q_s)|_{s=0} = h\ ,$$

où $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $h(0) = h(1) = \vec{0}$.

Remarques 2.1.

- *On peut interpréter h comme le vecteur $\gamma'(0)$ tangent à la courbe $\gamma : s \mapsto q_s$ au point $q = \gamma(0) \in \mathcal{C}$. On note $T_q\mathcal{C}$ l'espace de toutes ces courbes h obtenues de cette manière (l'espace tangent à $\mathcal{C}$ en q).*
- *Soit $h \in T_q\mathcal{C}$, un exemple simple de variation $(q_s)_s$ associée à h est donné par :*

$$q_s : t \mapsto q(t) + sh(t)\ .$$

Soit (q_s) la variation précédente associée à $h \in T_q\mathcal{C}$. Pour tout s assez proche de 0, l'image de q_s est incluse dans U.

Proposition 2.1. *La fonction $s \mapsto S(q_s)$ est dérivable au voisinage de* 0.

Démonstration. *On peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$ à la fonction*

$$(s,t) \mapsto \mathcal{L}(q_s(t), \dot{q}_s(t), t)\ .$$

Par dérivation en chaîne, on obtient pour $t \in [0,1]$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathcal{L}(q_s(t), \dot{q}_s(t), t)\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(q_s(t)) \ + \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\dot{q}_s(t))\ .$$

On obtient alors par évaluation en $s = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}S(q_s)|_{s=0} = \int_0^1 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\cdot h(t) \ + \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\cdot \dot{h}(t)\right] \mathrm{d}t\ ,$$

où les fonctions (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$ et $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ sont évaluées en $(q(t), \dot{q}(t), t)$.

Ici, le point médian « $\cdot$ » désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

On intègre par parties le deuxième terme de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\cdot \dot{h}(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\cdot h(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\cdot h(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Comme $h(0) = h(1) = \vec{0}$, le crochet est nul et il reste :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}S(q_s)|_{s=0} = \int_0^1 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\right]\cdot h(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Remarque 2.2. *D'une certaine manière*[1]*, S est différentiable en q et l'expression précédente donne $\mathrm{d}S_q(h)$, la différentielle de S en q évaluée en h.*

Définition 2.2. *On appellera* ***extrémale de*** *S tout élément $q \in \mathcal{C}$ telle que $\mathrm{d}S_q$ est nulle au sens précédent.*

Théorème 2.1. ***(Équations d'Euler-Lagrange)***
La courbe $q : t \mapsto q(t)$ est une extrémale de S si et seulement si :

$$\forall t \in [0,1]\ ,\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q(t),\dot{q}(t),t) \ - \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)(q(t),\dot{q}(t),t) = 0$$

Démonstration. *La condition est suffisante d'après le calcul précédent.*

Réciproquement, si q est une extrémale de S, alors pour toute courbe h lisse telle que $h(a) = h(b) = 0$:

$$\int_0^1 v(t)\cdot h(t)\,\mathrm{d}t = 0\ ,\ \text{où}\ \ v(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \ - \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\ .$$

Par l'absurde, s'il existe t_0 tel que le vecteur $v(t_0)$ est non nul, on peut supposer sans perte de généralité que $t_0 \in]0,1[$ par continuité de v.

On pose alors $h : t \mapsto \chi(t)v(t)$ où χ est une fonction positive et lisse telle que $\chi(t_0) > 0$, et telle que $\chi(0) = \chi(1) = 0$.

La fonction $t \mapsto v(t)\cdot h(t) = \chi(t)\|v(t)\|^2$ est alors continue, positive et non nulle, ce qui donne

$$\int_0^1 v(t)\cdot h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \chi(t)\|v(t)\|^2\,\mathrm{d}t \ > \ 0\ ,$$

en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle q est une extrémale de S.

Remarque 2.3. *À noter que v (et donc potentiellement h) n'est* a priori *pas mieux que continue ! On peut régler ce problème en approchant uniformément v par des fonctions lisses et en réduisant au besoin le support de χ.*

Exemples 2.1.

- *Les équations d'Euler-Lagrange permettent de retrouver les équations du mouvement pour un système mécanique soumis à des forces dérivant d'une énergie potentielle $V(q)$, le Lagrangien s'écrit alors $\mathcal{L} = K - V(q)$, où $K = \frac{1}{2}m\|\dot{q}\|^2$. On applique en effet le* principe de moindre action*, affirmant que le mouvement $t \mapsto q(t)$ est une extrémale de l'action S associée à ce Lagrangien.*
  Par exemple pour le pendule simple de masse m pendu au bout d'un fil de longueur ℓ dans un champ de pesanteur $\vec{g}$, son énergie potentielle est $V = -mg\ell\cos(\theta)$ tandis que l'énergie cinétique est simplement $K = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$.
  L'équation d'Euler-Lagrange correspondante donne : $m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta$, soit l'équation classique du pendule simple $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0$.
- *Pendule double ? Faisable avec E-L, infâme sinon*
- *Dans le problème de minimisation de l'énergie $\mathcal{L} = \frac{\|\dot{q}\|^2}{2y^2}$ des chemins entre deux points de $\mathbb{H}$, on a $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{y^2}$, et les équations d'Euler-Lagrange se lisent :*

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{x}}{y^2}\right) & = & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{y}}{y^2}\right) & = & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} & = & -\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^3} \end{cases}.$$

Pour intégrer ces équations, on aura généralement besoin de déterminer des *constantes du mouvement* comme suit.

1. Appelée dérivabilité au sens de Gâteaux

2.3 Intégrales premières, Théorème de Noether

Définition 2.3. *Étant donné un Lagrangien $\mathcal{L}$, une* ***intégrale première associée à*** *$\mathcal{L}$ est une fonction $f : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que*

$$t \mapsto f\left(q(t), \dot{q}(t)\right)$$

est constante le long d'une trajectoire $t \mapsto q(t)$ solution des équations d'Euler-Lagrange.

Le but est de déterminer des intégrales premières afin de trouver les solutions $q : t \mapsto q(t)$ des équations d'Euler-Lagrange (ou, à défaut, de trouver les équations de la trajectoire).

Pour cela, le Théorème de Noether énoncé ci-après incite à déterminer des *symétries infinitésimales de $\mathcal{L}$.*

Définition 2.4. *Une* ***symétrie de*** *$\mathcal{L}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ϕ tel que $\phi(U) \subset U$ et tel que :*

$$\forall (x, v) \in U \times \mathbb{R}^n \ , \ \mathcal{L}\left(\phi(x), D\phi_x(v)\right) = \mathcal{L}(x, v) \ .$$

Remarque 2.4. *Dans ce cas, si $q : [0,1] \to U$ est un chemin $\mathcal{C}^1$, le chemin $q_\phi := \phi \circ q$ est également $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $t \in [0,1]$, $\dot{q_\phi}(t) = D\phi_{q(t)}\left(\dot{q}(t)\right)$, ce qui implique alors l'égalité :*

$$\mathcal{L}\left(q_\phi(t), \dot{q_\phi}(t), t\right) = \mathcal{L}\left(q(t), \dot{q}(t)\right) \ ,$$

et ainsi $S[q_\phi] = S[q]$, où S est l'action associée à $\mathcal{L}$

Exemple 2.1. *Dans l'exemple de $\mathbb{H}$ (demi-plan de Poincaré), la translation $\tau : (x, y) \mapsto (x+1, y)$ est une symétrie du lagrangien $\mathcal{L} : q \mapsto \dfrac{\|\dot{q}\|^2}{y^2}$ (autrement dit, une* isométrie de $\mathbb{H}$ *muni de la* distance de Poincaré*).*

Définition 2.5. ***Un groupe à un paramètre de symétries de*** *$\mathcal{L}$ est une famille $(\phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$ de symétries de $\mathcal{L}$ telles que :*

- $\phi_0 = id_U$
- *Pour tous $s, s' \in \mathbb{R}$, $\phi_s \circ \phi_{s'} = \phi_{s+s'}$*
- *Pour tout $x \in U$, l'application $s \mapsto \phi_s(x)$ est lisse ($\mathcal{C}^1$).*

Le générateur *de ce groupe de symétries est alors le champ de vecteurs W donné par :*

$$\forall x \in U \ , \ W(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\phi_s(x)\right)|_{s=0} \ .$$

On appelle alors W une ***symétrie infinitésimale de*** *$\mathcal{L}$.*

Exercice 2.1.

1. *Vérifier que pour tout $(s, x) \in \mathbb{R} \times U$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\phi_s(x)\right) = W\left(\phi_s(x)\right)$.*
2. *En déduire que si W est une symétrie infinitésimale, le groupe à un paramètres de symétries de $\mathcal{L}$ le générant est unique.*

On remarque que l'hypothèse selon laquelle les ϕ_s sont des symétries de $\mathcal{L}$ est superflue ici (le calcul reste valable pour tout groupe à un paramètre de difféomorphismes).

Exemple 2.2. *Toujours dans le cas de $\mathbb{H}$ (demi-plan de Poincaré), la famille (τ_s) des translations définies par :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{H} \ , \ \forall s \in \mathbb{R} \ , \ \tau_s(x, y) = (x+s, y)$$

est un groupe à un paramètres de symétries (d'isométries de $\mathbb{H}$ pour la distance de Poincaré).

La symétrie infinitésimale associée est le champ de vecteurs uniforme $W : (x, y) \mapsto (1, 0)$.

Théorème 2.2. ***(Noether)***
Si $\mathcal{L} : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un lagrangien indépendant du temps et si W est une symétrie infinitésimale de $\mathcal{L}$, alors une intégrale première de $\mathcal{L}$ est :

$$f : (q, \dot{q}) \longmapsto \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot W(q) \,.$$

Démonstration. *Soit f comme ci-dessus.*
Soit $s \mapsto \phi_s$ le groupe à un paramètre de symétries de $\mathcal{L}$ engendré par W.
Si $t \mapsto (q(t), \dot{q}(t))$ est une courbe lisse dans $U \times \mathbb{R}^n$, alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(q(t), \dot{q}(t))\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) \cdot W(q(t)) \;+\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(W(q(t))\right) \,.$$

Si $t \mapsto (q(t), \dot{q}(t))$ est solution des équations d'Euler-Lagrange et vu que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(W(q(t))\right) = \dfrac{\partial W}{\partial q} \cdot \dot{q}$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(q(t), \dot{q}(t))\right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \cdot W(q) \;+\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \left[\frac{\partial W}{\partial q} \cdot \dot{q}\right] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathcal{L}(\phi_s(q), \frac{\partial \phi_s}{\partial q}\dot{q})\right)|_{s=0} \\ &= 0 \,. \end{aligned}$$

Exemple 2.3. *En mécanique dans le plan, on considère un point de position $q = (r, \theta)$ en coordonnées polaires, de masse m, soumis à une* force centrale, *c'est-à-dire dérivant d'une énergie potentielle $V = V(r)$ ne dépendant que de la distance à l'origine. Le lagrangien s'écrit $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \|\dot{q}\|^2 - V(r) = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right) - V(r)$.*

Exercice 2.2.

1. *En considérant $W = \dfrac{\partial}{\partial \theta}$ (générateur infinitésimal du groupe des rotations centrées en $r = 0$), vérifier que W est une symétrie infinitésimale de $\mathcal{L}$.*
2. *En déduire à l'aide du théorème de Noether la conservation du moment cinétique : $mr^2 \dot{\theta} = \text{Constante}$.*

Exemple 2.4. *Pour les géodésiques de $\mathbb{H}$, le lagrangien $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2y^2}$ ne dépend pas de x, le champ de vecteur $W_1(q) = (1, 0)$ (que l'on note $W_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$) est donc une symétrie infinitésimale de $\mathcal{L}$. L'intégrale première associée par le Théorème de Noether est donc la première coordonnée de $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$, c'est-à-dire*

$$\boxed{C_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{y^2}}\,.$$

Une deuxième intégrale première est obtenue en identifiant $\mathbb{H}$ au demi-plan supérieur donné par $\mathfrak{Im}(z) > 0$ de $\mathbb{C}$ et en vérifiant que les homographies de la forme

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}\,, \quad \text{où} \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{tels que} \quad ad - bc > 0$$

sont des isométries de $\mathbb{H}$, autrement dit que ce sont des symétries de $\mathcal{L}$.

Exercice 2.3. *Le vérifier !*

Pour tout réel s, on considère en particulier l'isométrie $\phi_s : z \mapsto \dfrac{\mathrm{ch}(s)z + \mathrm{sh}(s)}{\mathrm{sh}(s)z + \mathrm{ch}(s)}$ *de* $\mathbb{H}$ *muni de sa métrique* $\mathrm{d}s^2$*, ce qui définit un groupe à un paramètre de symétries de* $\mathcal{L}$ *engendré par* W_2 *tel que* $W_2(z) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\phi_s(z)|_{s=0} = 1 - z^2$.

Exercice 2.4. *Vérifier ceci !*

En revenant aux coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^2$*, on obtient ainsi la symétrie infinitésimale de* $\mathcal{L}$ *:*

$$W_2 : (x, y) \mapsto \left(1 - x^2 + y^2, -2xy\right) \ .$$

L'intégrale première associée est alors

$$C_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(1 - x^2 + y^2) \ + \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \times (-2xy) = \frac{\dot{x}}{y^2}(1 - x^2 + y^2) \ - \ 2x\frac{\dot{y}}{y} \ .$$

Ainsi,

$$\boxed{C_2 = C_1(1 - x^2 + y^2) \ - \ 2x\frac{\dot{y}}{y}} .$$

La proposition suivante donne naturellement une autre intégrale première pour un certain type de lagrangiens :

Proposition 2.2. *Soit* $\mathcal{L} : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un lagrangien homogène de degré* 2 *en sa 2ème variable, c'est-à-dire :*

$$\forall (x, v) \in U \times \mathbb{R}^n \, , \, \forall \lambda \in \mathbb{R} \, , \, \mathcal{L}(x, \lambda v) = \lambda^2 \mathcal{L}(x, v) \ .$$

Si $t \mapsto (q(t), \dot{q}(t))$ *est solution des équations d'Euler-Lagrange, alors*

$$\mathcal{L}(q, \dot{q})$$

est une intégrale première de $\mathcal{L}$.

Démonstration. *On calcule :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \cdot \dot{q}(t) \ + \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \ddot{q}(t) \ .$$

Or, $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \ddot{q}(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q}(t)\right) - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) \cdot \dot{q}(t)$.

Les équations d'Euler-Lagrange impliquent alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q}(t)\right) \ ,$$

donc $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q}(t) + C$*, où* C *est une constante.*

Or, $\mathcal{L}$ *est homogène de degré* 2 *par rapport à* $\dot{q}$*, on a donc :*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} = 2\mathcal{L}(q, \dot{q}) \ .$$

Exercice 2.5. *Vérifier ceci !*

On a donc bien $t \mapsto \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$ *constante (égale à* $-C$ *ici).*

Remarque 2.5. *Un exemple classique et incontournable est celui de lagrangiens associés à une métrique riemannienne (ou pseudo-riemannienne), c'est-à-dire de la forme d'une application lisse :*

$$g : (x, v) \mapsto \sum_{i=1}^{n} g_{ij}(x) v_i v_j \ .$$

Autrement dit, pour tout $x \in U$, $g(x, \cdot)$ est une forme quadratique notée g_x, et l'application lisse $x \mapsto g_x$ est un champ de formes quadratiques.

On note couramment $g = \sum_{i=1}^{n} g_{ij} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j$ cette application.

Dans le cas où ces formes quadratiques sont définies-positives (associées donc à des produits scalaires), on dit que g est une métrique riemannienne sur *U. En chaque point x de U, on obtient l'application « norme au carré » $v \mapsto g_x(v)$, également notée $v \mapsto \|v\|_{g_x}^2$ sur « l'espace vectoriel tangent à U en x », ici $\mathbb{R}^n$.*

Exemple 2.5. *Dans notre exemple précédent du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$, le lagrangien est donné par $\mathcal{L} = \dfrac{1}{2} g_{\mathbb{H}}$, où la métrique riemannienne $g_{\mathbb{H}}$ est donnée par :*

$$g_{\mathbb{H}} = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2} \ .$$

En vertu de la proposition précédente, on obtient une troisième constante du mouvement le long d'une géodésique :

$$\boxed{C_3 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}} \ .$$

En injectant dans cette dernière relation les deux précédentes, on obtient :

$$C_1^2 y^4 + \frac{y^2}{4x^2} \left[C_1(1 - x^2 + y^2) - C_2 \right]^2 = C_3 y^2 \ ,$$

ou encore :

$$C_1^2 \left(x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \right) + 2 \left(-2C_3 - C_1^2 + C_1 C_2 \right) x^2 + 2C_1(C_1 - C_2) y^2 + (C_1 - C_2)^2 = 0 \ .$$

- $\boxed{\textit{Si } C_1 \neq 0}$*, on peut vérifier avec quelques efforts que cette équation peut se réécrire comme :*

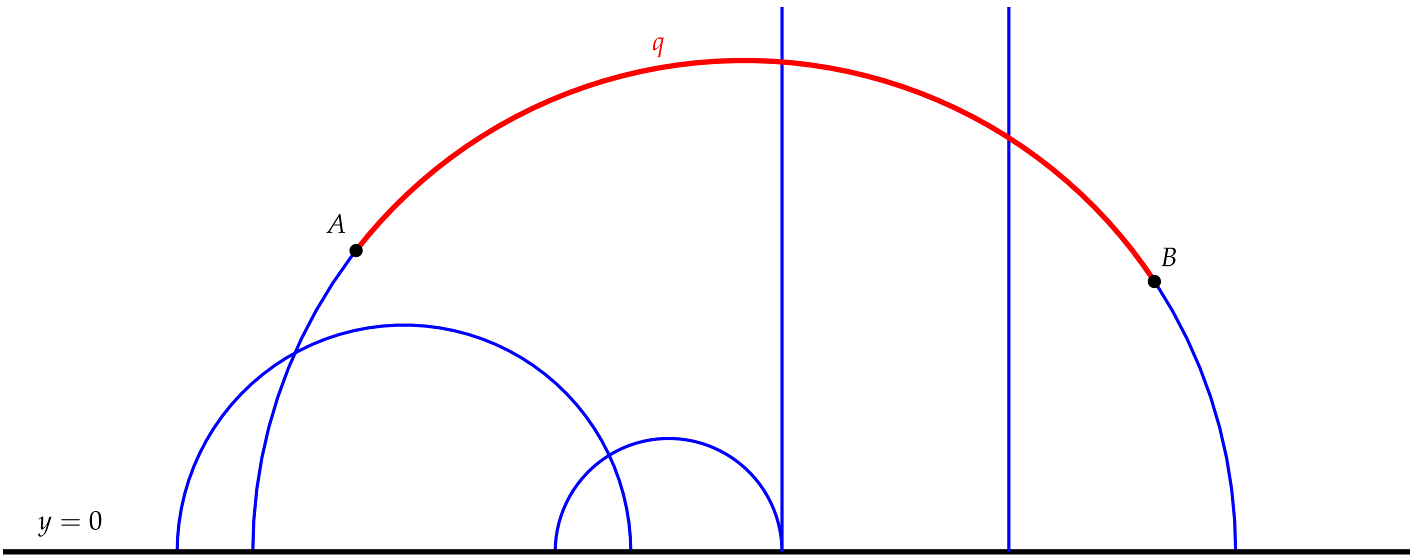
  $$(x - a)^2 + y^2 = R^2 \ ,$$

  soit l'équation d'un cercle de centre $(a, 0)$ (sur l'axe des abscisses) et de rayon R, où $a^2 = \dfrac{C_3}{C_1^2} + 1 - \dfrac{C_2}{C_1}$ et $R = \dfrac{\sqrt{C_3}}{|C_1|}$.

- $\boxed{\textit{Si } C_1 = 0}$*, l'équation s'écrit $-4C_3 x^2 + C_2^2 = 0$, soit $\boxed{x = \pm \dfrac{C_2}{2\sqrt{C_3}}}$: c'est la réunion de deux droites (verticales).*

Dans tous les cas, on a retrouvé les géodésiques de $\mathbb{H}$, voir par exemple [3, Proposition 3.139].

Quelques géodésiques du demi-plan de Poincaré



Exercice 2.6. *On s'intéresse au problème de la* chaînette *: on considère un fil immobile de longueur ℓ et de masse linéique uniforme μ suspendu entre deux clous positionnés aux points de coordonnées $A(-a,0)$ et $B(a,0)$ dans le plan (vertical) $(O;\vec{i},\vec{j})$, le tout dans un champ gravitationnel uniforme $\vec{g} = -g\vec{j}$. On cherche à déterminer la position occupée par ce fil sous forme d'une courbe d'équation $y = f(x)$.*

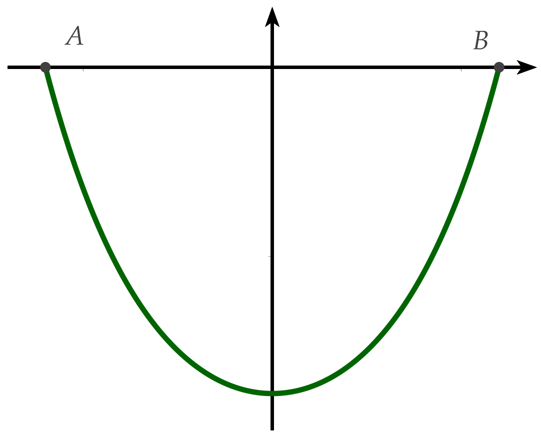
1. *Écrire le lagrangien et l'action correspondants au problème de la minimisation de l'énergie potentielle totale du fil.*

2. *On considère plutôt $\mathcal{L} = -y^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$.*

  a. *Donner une symétrie infinitésimale évidente de $\mathcal{L}$ et son intégrale première associée.*

  b. *Justifier que $\mathcal{L}(q,\dot{q})$ est également une intégrale première.*

  c. *En déduire une relation entre $\dot{x}$ et $\dot{y}$ le long d'une extrémale, puis montrer que celle-ci est décrite dans le plan par une équation à déterminer de la forme $y = f(x)$.*



Rappel : *Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ sur $]1,+\infty[$ est la fonction* argch *: $t \mapsto \ln\left(t + \sqrt{t^2-1}\right)$.*

À suivre : *le formalisme de Hamilton et de Poisson, et la version hamiltonienne du Théorème de Noether permettant de retrouver les résultats précédents, voire d'autres...*

Références

[1] Jean-Pierre BOURGUIGNON. *Calcul variationnel*. Les éditions de l'École Polytechnique, 2007.

[2] Bernard DACOROGNA. *Introduction to the calculus of variations*. 2004.

[3] Sylvestre GALLOT, Dominique HULIN, and Jacques LAFONTAINE. *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag - Universitext, 3e édition - 2004.

[4] Pierre PANSU. *Calcul des variations*. Chapitre1.pdf, Cours de Géométrie Différentielle, 2005.