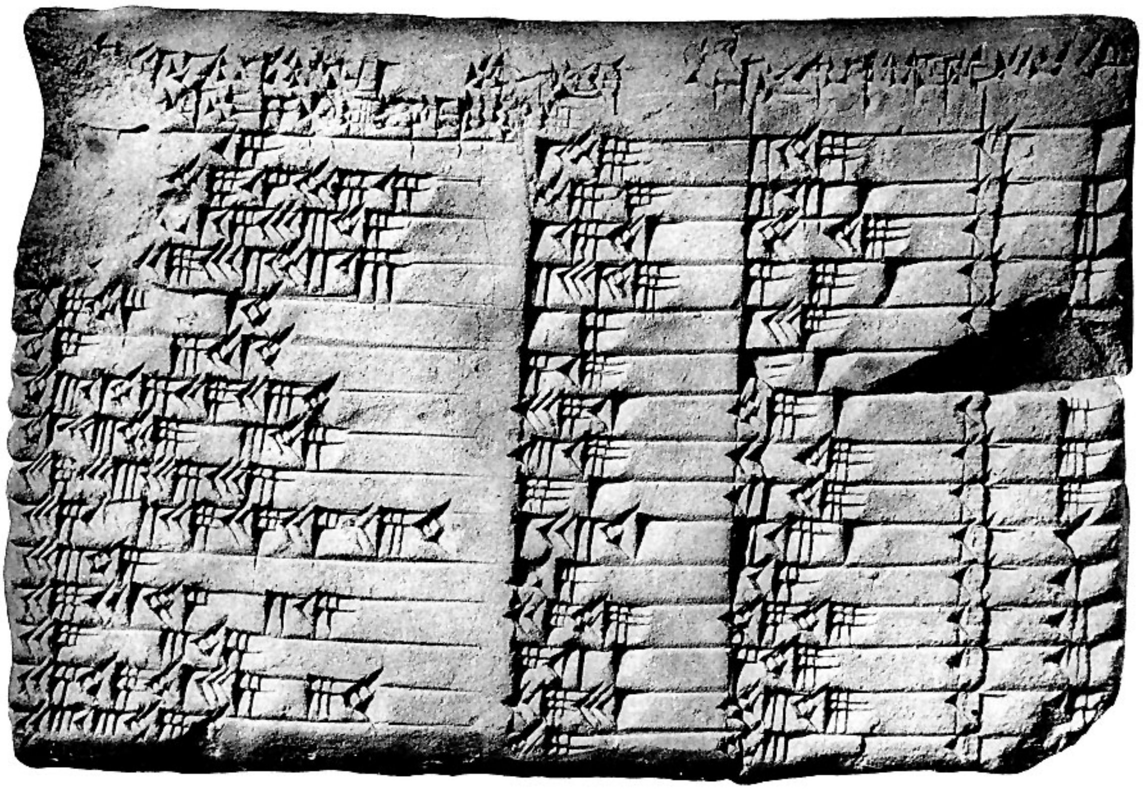
Cahier de vacances

— pour préparer l'entrée en BCPST1 —



Plimpton 322, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets (a, b, c) de nombres entiers vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

Ce cahier de calcul "BCPST" est une sélection d'exercices choisis dans "le cahier de calcul" écrit par les auteurs dont les noms suivent.

Coordination

Colas Bardavid

Équipe des participants

Vincent Bayle, Romain Basson, Olivier Bertrand, Ménard Bourgade, Julien Bureaux, Alain Camanes, Mathieu Charlot, Mathilde Colin de Verdière, Keven Commault, Miguel Concy, Rémy Eupherte, Hélène Gros, Audrey Hechner, Florian Hechner, Marie Hézard, Nicolas Laillet, Valérie Le Blanc, Thierry Limoges, Quang-Thai Ngo, Xavier Pellegrin, Fabien Pellegrini, Jean-Louis Pourtier, Valérie Robert, Jean-Pierre Técourt, Guillaume Tomasini, Marc Tenti

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).

La photographie de la couverture vient de Wikipedia.

Version BCPST — 30 juin 2022

Sommaire

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est conçu pour vous aider à préparer votre entrée en première année de BCPST.

C'est la première version de ce cahier. Il peut y avoir quelques erreurs (peu), quelques exercices trop difficiles... Pas de panique, il ne s'agit pas de tout faire en bloc, mais de re-solliciter au maximum les compétences acquises en première et en terminale.

Nous avons essayé d'être conformes à la fois au programme de spécialité mathématiques de terminale et d'option mathématiques complémentaires.

Il nous semble essentiel que les étudiants rentrant en BCPST maitrisent les techniques présentées dans ce cahier. Il y a parfois bien sûr des exercices plus difficiles mais leur compréhension à l'aide du corrigé sera de toute façon profitable.

Plus vous êtes ambitieux dans vos études, plus vous devez approfondir ce cahier !

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études post-Bac.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant de voir d'un seul coup d'œil les différentes fiches et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie **exercices**, centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Les réponses brutes ainsi que les corrigés détaillés, qui sont à la fin du cahier.

Chaque fiche de calcul est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis.
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (), deux (), trois () ou quatre () horloges.

- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Comment l'utiliser ?

Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple.

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme.

Une bonne connaissance du cours combinée à une plus grande aisance en calcul, c'est un très beau tremplin vers la réussite en prépa ou dans vos études !

Cécile Schreiber et Yannick Gâtel
Professeurs de Mathématiques en BCPST
Lycée Joffre

Énoncés

Fiche de calcul n° 1

001A

Fractions

Prérequis
Règles de calcul sur les fractions.
L'objectif est de se débrouiller SANS machine à calculer !

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $\dfrac{32}{40}$ ....

b) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2}$ ....

c) $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$ ....

d) $\dfrac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$ ....

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3}$ ....

b) $\dfrac{2}{3} - 0{,}2$ ....

c) $\dfrac{36}{25} \times \dfrac{15}{12} \times 5$ ....

d) $-\dfrac{2}{15} \div (-\dfrac{6}{5})$ ....

Calcul 1.3

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7})$ ....

b) $\left(\dfrac{136}{15} - \dfrac{28}{5} + \dfrac{62}{10}\right) \times \dfrac{21}{24}$ ....

c) $\dfrac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$ ....

d) $\dfrac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$ ....

Calcul 1.4 — Un petit calcul.

Écrire $\dfrac{0{,}5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \dfrac{0{,}5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0{,}2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3{,}5}$ sous forme d'une fraction irréductible. ....

Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.

En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\dfrac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021)(2\,023)}$ ..

b) $\dfrac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2}$ ....

c) $\dfrac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235}$ ....

d) $\dfrac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001}$ ...

Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

a) $\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ ....

b) $\dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux. ....

c) $\dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1, 2\}$. ....

Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.

Simplifier $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n^2} k}{\sum\limits_{k=0}^{n} k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1 + 2 + \cdots + p = \dfrac{p(p+1)}{2}$. .....

Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.

Soit $k \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ et $x \in \mathbb{R} \backslash \{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \dfrac{b}{c}$ avec $b < c$.

a) $\dfrac{29}{6}$ ...... b) $\dfrac{k}{k-1}$ ... c) $\dfrac{3x-1}{x-2}$ ..

Calcul 1.9 — Un produit de fractions.

Soit $t \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$. On donne $A = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{(1+t)^2}$ et $B = \big(1+t^2\big)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible. ....

Comparaison

Calcul 1.10 — Règles de comparaison.

Comparer les fractions suivantes avec le signe « $>$ », « $<$ » ou « $=$ ».

a) $\dfrac{3}{5} \dots \dfrac{5}{9}$ .... b) $\dfrac{12}{11} \dots \dfrac{10}{12}$ ...... c) $\dfrac{125}{25} \dots \dfrac{105}{21}$ ....

Calcul 1.11 — Produit en croix.

Les nombres $A = \dfrac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \dfrac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux ? Oui ou non ? ....

Calcul 1.12 — Produit en croix.

On pose $A = \dfrac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B = \dfrac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$? ....

Réponses mélangées

$\dfrac{-1}{n(n+1)^2}$ $-\dfrac{ab}{a-b}$ 2 3 $\dfrac{12}{11} > \dfrac{10}{12}$ $\dfrac{1}{2}$ 247 $\dfrac{n^3+n}{n+1}$ $1\ 000$ $\dfrac{1}{9}$

$2t$ $2\ 022$ $\dfrac{-10}{3}$ $\dfrac{4}{5}$ $3 + \dfrac{5}{x-2}$ $\dfrac{3}{2}n$ $\dfrac{203}{24}$ $\dfrac{7}{15}$ $\dfrac{1}{6}$ $\dfrac{3}{5} > \dfrac{5}{9}$ 9

$4 + \dfrac{5}{6}$ $A > B$ 1 $\dfrac{16}{35}$ 2^5 $-2 \times 3^{3k-2}$ Non $1 + \dfrac{1}{k-1}$ $\dfrac{125}{25} = \dfrac{105}{21}$

▶ Réponses et corrigés page 27

Puissances

Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décomposition en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 2.1

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ ....

b) $(10^5)^3$ ....

c) $\dfrac{10^5}{10^3}$ ....

d) $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}$ ....

e) $\dfrac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$ ....

f) $\dfrac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$ ......

Calcul 2.2

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ ....

b) $(5^3)^{-2}$ ....

c) $\dfrac{2^5}{2^{-2}}$ ....

d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ ....

e) $\dfrac{6^5}{2^5}$ ....

f) $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$ ....

Calcul 2.3

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ ....

b) $2^{21} + 2^{22}$ ....

c) $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$ ....

d) $\dfrac{\left(3^2 \cdot (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \cdot 2^3\right)^{-2}}$ ....

Calcul 2.4

Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\dfrac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ ....

b) $\dfrac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ ....

c) $\dfrac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$ ....

d) $\dfrac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$ ....

Calcul 2.5

Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

a) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ ....

b) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4}$ ....

c) $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x}$ ....

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{x}{x+1}$ $\quad 15^4 \quad$ $\dfrac{2x}{x+1}$ $\quad 2^{21} \cdot 3 \quad 10^{15} \quad 11 \quad 5^{-6} \quad 2^{38} \cdot 3^{26}$

$10^2 \quad 10^8 \quad 10^{-2} \quad 2^{-4} \cdot 3^{-1} \quad 2^6 \cdot 5 \quad 3^5 \quad (-7)^{-2}$

$\dfrac{2}{x-2}$ $\quad 10^4 \quad 8 \quad 2^7 \quad 10^{-8} \quad 3^{10} \quad$ $\dfrac{1}{x-2}$ $\quad 3^{28} \quad 2$

► Réponses et corrigés page 30

Calcul littéral

Prérequis
Les identités remarquables.

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, la variable x représente un nombre réel.

Calcul 3.1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

a) $\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)^3$ ....

b) $(x-1)^3\big(x^2+x+1\big)$ ....

c) $(x+1)^2(x-1)\big(x^2-x+1\big)$ ....

d) $(x+1)^2(x-1)\big(x^2+x+1\big)$ ....

e) $(x-1)^2(x+1)\big(x^2+x+1\big)$ ....

f) $\big(x^2+x+1\big)\big(x^2-x+1\big)$ ....

Calcul 3.2

Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x.

a) $(x-2)^2\big(-x^2+3x-1\big)-(2x-1)(x^3+2)$ ....

b) $(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)$ ....

c) $\Big((x+1)^2(x-1)\big(x^2-x+1\big)+1\Big)x-x^6-x^5+2$ ....

d) $(x+1)(x-1)^2-2\big(x^2+x+1\big)$ ....

e) $\Big(x^2+\sqrt{2}x+1\Big)\Big(1-\sqrt{2}x+x^2\Big)$ ....

f) $\big(x^2+x+1\big)^2$ ....

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.

Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$ ....

b) $25-(10x+3)^2$ ....

c) $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$ ....

d) $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$ ....

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.

Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de $x^2 + 2bx + c$ est $(x + b)^2 + c - b^2$ et celle de $x^2 - 2bx + c$ est $(x - b)^2 + c - b^2$.

En fait avec les deux premiers termes, on reconnaît le début de l'identité remarquable $x^2 + 2bx + b^2$; on ajoute et on retranche b^2 pour faire apparaître cette identité remarquable !

a) $x^2 - 2x + 1$ ....

b) $x^2 + 4x + 4$ ....

c) $x^2 + 3x + 2$ ....

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x + y)^2 - z^2$ ....

b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$ ....

c) $xy + x + y + 1$ ....

d) $xy - x - y + 1$ ....

e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$ ..

f) $y^2(a^2 + b^2) + 16x^4(-a^2 - b^2)$ ..

Réponses mélangées

$-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4$ $\quad$ $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$ $\quad$ $4(5x + 4)(-5x + 1)$ $\quad$ $-28 + 21x$

$(a^2 + b^2)(y - 4x^2)(y + 4x^2)$ $\quad$ $-6(6x + 7)$ $\quad$ $(x - 1)(y - 1)$ $\quad$ $3(14x + 3y)(-4x + y)$

$2 + x^3 - x^4 - x^5$ $\quad$ $(x + 1)(x + 2)$ $\quad$ $2(3x - 4)(10x + 3)$ $\quad$ $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$

$x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$ $\quad$ $x^4 + x^2 + 1$ $\quad$ $(x + y - z)(x + y + z)$ $\quad$ $8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}$

$(x + y)(x + 1)^2$ $\quad$ $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ $\quad$ $(x + 2)^2$ $\quad$ $-1 - 3x - 3x^2 + x^3$

$x^5 - x^3 + x^2 - 1$ $\quad$ $1 + x^4$ $\quad$ $(x + 1)(y + 1)$ $\quad$ $(x - 1)^2$ $\quad$ $-8(x + 1)(x + 16)$

► Réponses et corrigés page 31

Fiche de calcul n° 4 **004A**

Racines carrées

Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

On rappelle que la quantité conjuguée de $a+\sqrt{b}$ est $a-\sqrt{b}$, que la quantité conjuguée de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

On utilise souvent la quantité conjuguée pour faire disparaitre les racines au dénominateur, ou pour transformer des expressions dans le but de calculer une limite. Voici un exemple

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{2+2\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2}=3+2\sqrt{2}.$$

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.

Exprimer sans racine carrée les expressions suivantes.

a) $\sqrt{(-5)^2}$ ....

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$ ....

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ ....

d) $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$ ....

e) $\sqrt{(3-\pi)^2}$ ....

f) $\sqrt{(3-a)^2}$ ....

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.

Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$ ....

b) $(2+\sqrt{5})^2$ ....

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ....

d) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ ....

e) $(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2$ ....

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ ....

g) $\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ ....

h) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ .....

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3

Rendre rationnels les dénominateurs (c-à-d., obtenir une expression sans racine au dénominateur) des expressions suivantes .

a) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ....

c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ....

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

g) $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

f) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ ....

h) $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$ ....

Calcul 4.4

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

Réponses mélangées

$2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$ $\quad \pi-3$ $\quad 1+\sqrt{3}$ $\quad 20$ $\quad -(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ $\quad 3-2\sqrt{2}$

$1-\sqrt{10}+\sqrt{15}$ $\quad -\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$ $\quad -\sqrt{3}+2$ $\quad 50-25\sqrt{3}$

$2\sqrt{2}$ $\quad |3-a|$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$ $\quad \sqrt{7}-2$ $\quad 9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}$ $\quad 9+4\sqrt{5}$

$\sqrt{3}-1$ $\quad 10$ $\quad 12\sqrt{7}$ $\quad 12$ $\quad 3+\sqrt{2}$ $\quad 5$ $\quad \sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2$

► Réponses et corrigés page 33

Équations du second degré

Prérequis

Relations entre coefficients et racines.
On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) possédant deux racines réelles distinctes x_1 et x_2. Alors $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ et $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$.
Si l'équation n'a qu'une racine double x_0, alors $x_0^2 = \dfrac{c}{a}$ et $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. (On prend en fait $x_0 = x_1 = x_2$ dans la formule précédente.)
Application : lorsque l'on trouve une racine évidente, on peut en déduire la seconde à l'aide de ces formules !

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices (le but EST de ne pas les utiliser) !

Recherche de racines

Calcul 5.1 — Des racines vraiment évidentes.

Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi* $0, 1, -1, 2, -2$ *ainsi éventuellement que* 3 *et* -3.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ ....

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ ....

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ ....

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ....

e) $x^2 - 5x = 0$ ....

f) $2x^2 + 3x = 0$ ....

g) $2x^2 + 3 = 0$ ....

h) $x^2 + 4x - 5 = 0$ ....

i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$ ....

j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$ ....

Calcul 5.2 — Somme et produit.

Résoudre mentalement les équations suivantes.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$ ....

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ ....

c) $x^2 + 18x + 77 = 0$ ....

d) $x^2 - 8x - 33 = 0$ ....

e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ ....

f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ....

Calcul 5.3 — L'une grâce à l'autre.

Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine ....

b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine ....

c) $mx^2 + (2m+1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine ....

d) $(m+3)x^2 - (m^2+5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine ....

Factorisations et signe

Calcul 5.4 — Factorisation à vue.

Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x.

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x+2)(ax+b)$ ....

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x-1)(ax+b)$ ....

c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x-3)(ax+b)$ ....

d) $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{11}{2}x - 40 = (x-5)(ax+b)$ ....

e) $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x-\sqrt{7})(ax+b)$ ....

Calcul 5.5 — Signe d'un trinôme.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$ ....

b) $-x^2 + 2x + 15$ ....

c) $(x+1)(3x-2)$ ....

d) $\dfrac{x-4}{2x+1}$ ....

Réponses mélangées

$[-3, 5]$ $\quad$ $-7, -11$ $\quad$ $2/3$ $\quad$ 0, donc $-3/2$ $\quad$ $\varnothing$ $\quad$ $2, 3$ $\quad$ $6, 7$ $\quad$ $2m/(m+3)$

$-1/m$ $\quad$ $-3, -5$ $\quad$ $3, 3$ $\quad$ 1 donc -5 $\quad$ $a = -2$ et $b = 1$ $\quad$ $a-b, a+b$

$]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[$ $\quad$ a, b $\quad$ -1 donc $-19/5$ $\quad$ $]-\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[$ $\quad$ $-3, 11$

$]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$ $\quad$ $a = -3$ et $b = 5$ $\quad$ $a = 2$ et $b = 3$ $\quad$ $a = 1/2$ et $b = 8$

$-1/3, -1/3$ $\quad$ $-2/7$ $\quad$ 1 donc $8/3$ $\quad$ $2, -6$ $\quad$ $a = 1$ et $b = 3\sqrt{7}$ $\quad$ 0, donc 5

► Réponses et corrigés page 35

Fiche de calcul n° 6

006A

Exponentielle et logarithme

Prérequis

Exponentielle, logarithme.

Logarithmes

Calcul 6.1

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln 16$ ....

b) $\ln 512$ ....

c) $\ln 0{,}125$ ....

d) $\frac{1}{8}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{8}$ ....

e) $\ln 72 - 2\ln 3$ ....

f) $\ln 36$ ....

Calcul 6.2

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln\frac{1}{12}$ ....

b) $\ln(2{,}25)$ ....

c) $\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0{,}875)$ ....

d) $\ln 500$ ....

e) $\ln\frac{16}{25}$ ....

f) $\ln(6{,}25)$ ....

Calcul 6.3

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

$\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \cdots + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100}$ ....

Exponentielles

Calcul 6.4

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $\mathrm{e}^{3\ln 2}$ ....

b) $\ln(\sqrt{e})$ ....

c) $\ln(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}})$ ....

d) $\mathrm{e}^{-2\ln 3}$ ....

e) $\ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$ ....

f) $\mathrm{e}^{\ln 3 - \ln 2}$ ....

Calcul 6.5

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-\mathrm{e}^{-\ln\frac{1}{2}}$ ....

b) $\mathrm{e}^{-\ln\ln 2}$ ....

c) $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{17}}\right)$ ....

d) $\ln(\sqrt{\mathrm{e}^4}) - \ln(\sqrt{\mathrm{e}^2})$ ....

e) $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\right)$ ....

f) $\exp\left(-\dfrac{1}{3}\ln(\mathrm{e}^{-3})\right)$ ....

Études de fonctions

Calcul 6.6 — **Étude d'une fonction.**

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. ....

b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b) = \dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$. ....

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$. ....

d) Déterminer la limite de f en $-\infty$. ....

Calcul 6.7

On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x). \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

a) $f(2\mathrm{e}^x - 1)$ ....

b) $\mathrm{e}^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ ....

c) $\dfrac{1}{2}f(x^2 - 2x)$ ....

d) $xf'(x) - 1$ ....

e) $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ ....

Équations, inéquations

Calcul 6.8

Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x).

a) $\mathrm{e}^{3x-5} \geqslant 12$ ....

b) $1 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2+x}$ ....

c) $\mathrm{e}^{1+\ln x} \geqslant 2$ ....

d) $\mathrm{e}^{-6x} \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}$ ....

e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ ....

f) $\ln(-x-5) = \ln \dfrac{x-61}{x+7}$ ....

Réponses mélangées

$-\ln 3 - 2\ln 2$ $\quad e \quad 1 \quad e^{x\ln(1+x)} \quad 4\ln 2 \quad x \geqslant -\dfrac{1}{12} \quad 2\ln 2 + 2\ln 3$

$\dfrac{-13-\sqrt{273}}{2} \quad x \in [0,1] \quad 3\ln 5 + 2\ln 2 \quad \dfrac{1}{3} \quad -2 \quad$ -1 $\quad 1 \quad 9\ln 2$

$x \geqslant \dfrac{2}{e} \quad \mathbb{R} \quad 2\ln 5 - 2\ln 2 \quad \dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}} \quad -2\ln 2 - 2\ln 5 \quad \ln 3 + 11\ln 2 \quad x + \ln 2$

$-\dfrac{1}{2} \quad \dfrac{1}{\ln 2} \quad -1 \quad \dfrac{1}{9} \quad 3\ln 2 \quad \ln|x-1| \quad -\dfrac{1}{1+x} \quad -2\ln 5 + 4\ln 2$

$2\ln 3 - 2\ln 2 \quad x \geqslant \dfrac{\ln 12 + 5}{3} \quad \dfrac{3}{2} \quad \varnothing \quad -17 \quad \dfrac{1}{2}$ $\quad$ ok $\quad 8 \quad \dfrac{1}{2}\ln 2 \quad -3\ln 2$

► Réponses et corrigés page 37

Fiche de calcul n° 7 **007A**

Trigonométrie

Prérequis

Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$.
Symétrie et périodicité de sin et cos.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 7.1

En s'aidant du cercle trigonométrique ou de formules du cours, simplifier :

a) $\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{3\pi}{4} + \cos\dfrac{5\pi}{4} + \cos\dfrac{7\pi}{4}$. $\boxed{}$

b) $\sin\dfrac{5\pi}{6} + \sin\dfrac{7\pi}{6}$ .... $\boxed{}$

c) $\cos^2\dfrac{4\pi}{3} - \sin^2\dfrac{4\pi}{3}$ .... $\boxed{}$

Réponses mélangées

$-\dfrac{1}{2}$ $\qquad 0 \qquad 0$

▶ Réponses et corrigés page 39

Fiche de calcul n° 8 **008A**

Dérivation

Prérequis
Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 8.1 — Avec des produits.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6)\exp(2x)$. ....

d) $x \in \left]2, +\infty\right[$ et $f(x) = (3x^2 - x)\ln(x - 2)$ ....

Calcul 8.2 — Avec des puissances.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2\cos(x))^2$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3\cos(x) - \sin(x))^3$. ....

Calcul 8.3 — Avec des fonctions composées.

Certaines questions peuvent être difficiles si vous n'avez suivi que l'option mathématiques complémentaires.

Retenez, de façon générale, que la dérivée de $v(u)$ est $u' \times v'(u)$ quand v et u sont des fonctions dérivables sur les bons domaines.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. ....

b) $x \in \left]1, +\infty\right[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x)\exp(x^2 + x)$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3\sin(2x))$. ....

Calcul 8.4 — Avec des quotients.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2\sin(x)+3}$. ....

b) $x \in]0,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x+2}$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\cos(2x+1)}{x^2+1}$. ....

d) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{\ln(x)}$. ....

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 8.5

Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus 3,-2$ et $f(x) = \dfrac{1}{3-x} + \dfrac{1}{2+x}$. ....

b) $x \in]-1,+\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$ ....

c) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2+x-2) - \dfrac{x+2}{x-1}$. ....

d) $x \in]-1,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$. ....

e) $x \in]0,e[\cup]e,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$. ....

Réponses mélangées

$$(6x-1)\ln(x-2)+\frac{3x^2-x}{x-2} \qquad 4(2x^3+4x-1)(3x^2+2) \qquad 6x^2+2x-11$$

$$\frac{1}{x\ln(x)} \qquad \frac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} \qquad 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x)) \qquad \frac{x^2}{(x+1)^2} \qquad \frac{2x}{x^2+1}$$

$$-3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x)) \qquad \frac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$$

$$8\cos^2(x)-6\cos(x)\sin(x)-4 \qquad 5x^4-6x^2+4x-15 \qquad (2x^2-2x+10)\exp(2x)$$

$$\frac{2}{x+1}\left(x+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \frac{(4x+3)\ln(x)-2x-3}{(\ln(x))^2}$$

$$\frac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2} \qquad 5(x^2-5x)^4(2x-5) \qquad \frac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$$

$$-2\frac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2} \qquad \frac{2}{x(1-\ln(x))^2} \qquad (-2x^2+3x+1)\exp(x^2+x)$$

► Réponses et corrigés page 40

Primitives

Prérequis
Intégration de Terminale.
Dérivée d'une fonction composée.

Calculs directs

Calcul 9.1

Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{t+1}$ ....

b) $\dfrac{3}{(t+2)^2}$ ....

c) $\dfrac{3}{(t+2)^3}$ ....

d) $\sin(4t)$ ....

Calcul 9.2

Même exercice.

a) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$ ....

b) e^{2t+1} ....

Utilisation des formulaires

Calcul 9.3 — Dérivée d'une fonction composée.

On rappelle :

— Une expression de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ s'intègre en $\sqrt{u}$

— Une expression de la forme $\dfrac{u'}{u}$ s'intègre en $\ln|u|$.

— Une expression de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ s'intègre en $-\dfrac{1}{u}$.

— Une expression de la forme $u'u^\alpha$ s'intègre en $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$

— Une expression de la forme $u'\sqrt{u} = u'u^{1/2}$ s'intègre avec la formule précédente.

— Une expression de la forme $u'e^u$ s'intègre en e^u.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\dfrac{2t^2}{1+t^3}$ ....

b) $t\sqrt{1+2t^2}$ ....

c) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

d) $\dfrac{t}{1+3t^2}$ ....

e) $\dfrac{\ln^3 t}{t}$ ....

f) $\dfrac{1}{t\sqrt{\ln t}}$ ....

g) $\dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t}$ ....

h) $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2}$ ....

Réponses mélangées

$\ln\lvert t+1\rvert$	$\dfrac{1}{6}\ln(1+3t^2)$	$-\dfrac{3}{2(t+2)^2}$	$\ln\lvert 1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}\rvert$	$-\dfrac{3}{t+2}$	$-\dfrac{\cos(4t)}{4}$	$2\sqrt{\ln t}$
$\dfrac{1}{4}\ln^4 t$	$\dfrac{2}{3}\ln\lvert 1+t^3\rvert$	$\dfrac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}$	$-\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$	$-\sqrt{1-t^2}$	$\dfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}$	$\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}$

► Réponses et corrigés page 43

Calcul d'intégrales

Prérequis

Primitives usuelles, composées simples.
On rappelle :

- Une expression de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ s'intègre en $\sqrt{u}$
- Une expression de la forme $\dfrac{u'}{u}$ s'intègre en $\ln|u|$.
- Une expression de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ s'intègre en $-\dfrac{1}{u}$.
- Une expression de la forme $u'u^\alpha$ s'intègre en $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$
- Une expression de la forme $u'\sqrt{u} = u'u^{1/2}$ s'intègre avec la formule précédente.
- Une expression de la forme $u'e^u$ s'intègre en e^u.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon ordre ».

Calcul 10.1

Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^2 + \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. [ ]

b) $\displaystyle\int_{5}^{-3} |\sin 7x|\,\mathrm{d}x$ [ ]

c) $\displaystyle\int_{0}^{-1} \sin x\,\mathrm{d}x$ … [ ]

Calcul 10.2

En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} 7\,\mathrm{d}x$ .... [ ]

b) $\displaystyle\int_{7}^{-3} -5\,\mathrm{d}x$ ..... [ ]

c) $\displaystyle\int_{0}^{7} 3x\,\mathrm{d}x$ ...... [ ]

d) $\displaystyle\int_{2}^{8} 1-2x\,\mathrm{d}x$ .. [ ]

e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sin x\,\mathrm{d}x$ .... [ ]

f) $\displaystyle\int_{-2}^{1} |x|\,\mathrm{d}x$ ...... [ ]

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, que l'on note $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Calcul 10.3 — Polynômes.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2\,\mathrm{d}x$ .... [ ]

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} 2x-5\,\mathrm{d}x$ .... [ ]

c) $\displaystyle\int_{-2}^{0} x^2+x+1\,\mathrm{d}x$ .... [ ]

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^5-5x^3\,\mathrm{d}x$ .... [ ]

e) $\displaystyle\int_0^1 x^5 - x^4 \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_1^{-1} x^{100} \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 10.4 — Fonctions usuelles.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x \,\mathrm{d}x$ ...

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \,\mathrm{d}x$ ...

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ ....

d) $\displaystyle\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ ...

e) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ ......

f) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ ....

Calcul 10.5 — De la forme $f(ax+b)$.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\pi x + 2}$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 10.6 — Fonctions composées.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x (\cos x)^5 \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1} \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4} \,\mathrm{d}x$ ....

Réponses mélangées

0	Positif	$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$	0	$\dfrac{5}{2}$	6	$\dfrac{1}{384}$	$\dfrac{1}{\pi}\ln\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)$	14	$\dfrac{147}{2}$
$\dfrac{7}{48}$	$-\dfrac{1}{30}$	$\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-3}$	$2(\mathrm{e}^3-1)$	18	-2	78	0	$\dfrac{8}{3}$	-54
$-\ln 3$	$\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$	$\dfrac{1}{2}$	1	8	Négatif	Positif	0	50	$-\dfrac{2}{101}$

► Réponses et corrigés page 44

Fiche de calcul n° 11

Suites numériques

Prérequis

Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

Calcul de termes

Calcul 11.1 — Suite explicite.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$. Calculer :

a) u_0 ....

b) u_1 ....

c) u_{n+1} ....

d) u_{3n} ....

Calcul 11.2 — Suite récurrente.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$. Calculer :

a) son troisième terme ....

b) u_3 ....

Calcul 11.3 — Suite récurrente.

On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \geqslant 1,\ v_{n+1} = \sqrt{v_n}$. Calculer :

a) v_3 ....

b) son sixième terme ....

Calcul 11.4 — Suite récurrente.

On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n^2$. Calculer :

a) w_2 ....

b) son centième terme ....

Calcul 11.5 — Suite explicite.

Soit la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \ln\left(\dfrac{n^n}{2^n}\right)$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

a) t_{2n} ....

b) t_{4n} ....

Suites arithmétiques et géométriques

Calcul 11.6 — Suite arithmétique.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Calculer :

a) a_{10} ....

b) $s_{100} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{99}$ ....

c) $a_{1\ 000}$ ....

d) $s_{101} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{100}$ ....

Calcul 11.7 — Suite arithmétique.

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r vérifiant que $b_{101} = \dfrac{2}{3}$ et $b_{103} = \dfrac{3}{4}$. Calculer :

a) b_{102} ....

b) r ....

Calcul 11.8 — Suite géométrique.

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Calculer :

a) Son dixième terme est : ....

b) $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \ldots + g_9$ ....

c) g_{10} ....

d) $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \ldots + g_{10}$ ....

Calcul 11.9 — Suite géométrique.

La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q > 0$ vérifiant que $h_{11} = \dfrac{5\pi}{11}$ et $h_{13} = \dfrac{11\pi}{25}$. Calculer :

a) h_{12} ....

b) q ....

Réponses mélangées

29 $\quad \dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}$ $\quad \dfrac{1}{24}$ $\quad 2^{\frac{1}{8}}$ $\quad \dfrac{3}{1\,024}$ $\quad 8$ $\quad \dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}$

$\dfrac{12}{5}$ $\quad \dfrac{17}{24}$ $\quad 2^{\frac{1}{64}}$ $\quad 4n\ln(2n)$ $\quad 10\ 000$ $\quad 2n\ln(n)$ $\quad 2$ $\quad 10\ 201$

$2\ 001$ $\quad 2$ $\quad \dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}$ $\quad 13$ $\quad \dfrac{6141}{1024}$ $\quad 21$ $\quad \dfrac{3}{512}$ $\quad \dfrac{11\sqrt{5}}{25}$ $\quad \dfrac{3069}{512}$

► Réponses et corrigés page 47

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Fractions

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

1.1 b) .... $\boxed{2^5}$

1.1 c) .... $\boxed{3}$

1.1 d) .... $\boxed{-2\times 3^{3k-2}}$

1.2 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

1.2 b) .... $\boxed{\dfrac{7}{15}}$

1.2 c) .... $\boxed{9}$

1.2 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{9}}$

1.3 a) .... $\boxed{247}$

1.3 b) .... $\boxed{\dfrac{203}{24}}$

1.3 c) .... $\boxed{\dfrac{-10}{3}}$

1.3 d) .... $\boxed{1\ 000}$

1.4 .... $\boxed{\dfrac{16}{35}}$

1.5 a) .... $\boxed{2\ 022}$

1.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

1.5 c) .... $\boxed{1}$

1.5 d) .... $\boxed{2}$

1.6 a) .... $\boxed{\dfrac{-1}{n(n+1)^2}}$

1.6 b) .... $\boxed{-\dfrac{ab}{a-b}}$

1.6 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}n}$

1.7 .... $\boxed{\dfrac{n^3+n}{n+1}}$

1.8 a) .... $\boxed{4+\dfrac{5}{6}}$

1.8 b) .... $\boxed{1+\dfrac{1}{k-1}}$

1.8 c) .... $\boxed{3+\dfrac{5}{x-2}}$

1.9 .... $\boxed{2t}$

1.10 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{5}>\dfrac{5}{9}}$

1.10 b) .... $\boxed{\dfrac{12}{11}>\dfrac{10}{12}}$

1.10 c) .... $\boxed{\dfrac{125}{25}=\dfrac{105}{21}}$

1.11 .... $\boxed{\text{Non}}$

1.12 .... $\boxed{A>B}$

Corrigés

1.1 a) $\dfrac{32}{40}=\dfrac{8\times 4}{8\times 5}=\dfrac{4}{5}$

1.1 b) $8^3\times\dfrac{1}{4^2}=(2\times 4)^3\times\dfrac{1}{4^2}=2^3\times 4^3\times\dfrac{1}{4^2}=2^3\times 4=2^5$

1.1 c) $\dfrac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4}=\dfrac{(3^3)^{-1}\times(2^2)^2}{3^{-4}\times 2^4}=\dfrac{3^4}{3^3}=3$

1.1 d) On a : $\dfrac{(-2)^{2k+1}\times 3^{2k-1}}{4^k\times 3^{-k+1}}=\dfrac{(-2)\times(-2)^{2k}\times 3^{2k}\times 3^{-1}}{4^k\times 3^{-k}\times 3}=\dfrac{(-2)\times 4^k\times 3^{2k}\times 3^k}{4^k\times 3^2}=-2\times 3^{3k-2}$.

1.2 a) On met au même dénominateur : $\dfrac{2}{4}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\times 3}{4\times 3}-\dfrac{1\times 4}{3\times 4}=\dfrac{6}{12}-\dfrac{4}{12}=\dfrac{6-4}{12}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$.

1.2 b) On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3}-0{,}2=\frac{2}{3}-\frac{2}{10}=\frac{2\times 10}{3\times 10}-\frac{2\times 3}{10\times 3}=\frac{20}{30}-\frac{6}{30}=\frac{20-6}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7\times 2}{15\times 2}=\frac{7}{15}.$$

1.2 c) Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times 5=\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times\frac{5}{1}=\frac{36\times 15\times 5}{25\times 12\times 1}=\frac{12\times 3\times 5\times 3\times 5}{5\times 5\times 12\times 1}=\frac{3\times 3}{1}=\frac{9}{1}=9.$$

1.2 d) Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par la fraction inverse de la deuxième fraction :

$$-\frac{2}{15}\div\left(-\frac{6}{5}\right)=-\frac{2}{15}\times\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{2}{15}\times\frac{5}{6}=\frac{2\times 5}{15\times 6}=\frac{2\times 5}{3\times 5\times 2\times 3}=\frac{1}{9}.$$

1.3 a) On développe :

$$(2\times3\times5\times7)\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\Big)=\frac{2\times3\times5\times7}{2}+\frac{2\times3\times5\times7}{3}+\frac{2\times3\times5\times7}{5}+\frac{2\times3\times5\times7}{7}$$
$$=3\times5\times7+2\times5\times7+2\times3\times7+2\times3\times5=105+70+42+30=247.$$

1.3 b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{62}{10}\right)\times\frac{21}{24}=\left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{31}{5}\right)\times\frac{7}{8}$$
$$=\left(\frac{136}{15}+\frac{3}{5}\right)\times\frac{7}{8}=\left(\frac{136}{15}+\frac{9}{15}\right)\times\frac{7}{8}=\frac{145}{15}\times\frac{7}{8}=\frac{29}{3}\times\frac{7}{8}=\frac{203}{24}.$$

1.3 c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10}\times7^3-25^5\times49^2}{(125\times7)^3+5^9\times14^3}=\frac{5^{10}\times7^3-5^{10}\times7^4}{5^9\times7^3+5^9\times7^3\times2^3}=\frac{5^{10}\times7^3(1-7)}{5^9\times7^3(1+2^3)}=\frac{5\times(-6)}{9}=\frac{-10}{3}.$$

1.3 d) On calcule :

$$\frac{1\,978\times1\,979+1\,980\times21+1\,958}{1\,980\times1\,979-1\,978\times1\,979}=\frac{1\,978\times1\,979+1\,979\times21+21+1\,958}{1\,979\times(1\,980-1\,978)}$$
$$=\frac{1\,979\times(1\,978+21)+1\,979}{1\,979\times2}=\frac{1\,979\times(1\,978+21+1)}{1\,979\times2}=\frac{1\,979\times2\,000}{1\,979\times2}$$
$$=1\,000.$$

1.4 On calcule :

$$\frac{0{,}5-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{0{,}5-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-0{,}2}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-3{,}5}=\frac{\frac{3}{6}-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-\frac{7}{2}}$$
$$=\frac{3\big(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\big)}{5\big(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\big)}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{-7\big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\big)}=\frac{3}{5}-\frac{1}{7}=\frac{16}{35}.$$

1.5 a) On connaît l'identité remarquable : $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Donc : $\dfrac{2\,022}{(-2\,022)^2+(-2\,021)(2\,023)}=\dfrac{2\,022}{(2\,022)^2+(1-2\,022)\times(1+2\,022)}=\dfrac{2\,022}{(2\,022)^2+1-2\,022^2}=2\,022.$

1.5 b) On fait apparaître 2 021 dans 2 020 et 2 022 au dénominateur :

$$\frac{2\,021^2}{2\,020^2+2\,022^2-2}=\frac{2\,021^2}{(2\,021-1)^2+(2\,021+1)^2-2}$$
$$=\frac{2\,021^2}{2\,021^2-2\times2\,021\times1+1+2\,021^2+2\times2\,021\times1+1-2}$$
$$=\frac{2\,021^2}{2\,021^2-2\times2\,021\times1+2\,021^2+2\times2\,021\times1}=\frac{2\,021}{2\,021-2+2\,021+2}=\frac{1}{2}.$$

1.5 c) En posant $a=1\,234$, on a : $1\,235=a+1$ et $2\,469=2a+1$.

Donc : $\dfrac{1\,235\times2\,469-1\,234}{1\,234\times2\,469+1\,235}=\dfrac{(a+1)(2a+1)-a}{a(2a+1)+a+1}=\dfrac{2a^2+2a+1}{2a^2+2a+1}=1.$

1.5 d) En posant $a=1\,000$, on a : $999=a-1$, $1\,001=a+1$, $1\,002=a+2$ et $4\,002=2a+2$.

Donc : $\dfrac{4\,002}{1\,000\times1\,002-999\times1\,001}=\dfrac{4a+2}{a(a+2)-(a-1)(a+1)}=\dfrac{2(2a+1)}{a^2+2a-(a^2-1)}=\dfrac{2(2a+1)}{2a+1}=2.$

1.6 a) On met au même dénominateur. Cela donne :

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n}{n(n+1)^2}+\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}=\frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2}$$
$$=\frac{n+n^2+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2}=\frac{-1}{n(n+1)^2}.$$

1.6 b) On rappelle la formule : $a^3-b^3=(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)$. Cela donne :

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{ab+a^2+b^2}{a-b}-\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}=-\frac{ab}{a-b}.$$

1.6 c) Pour $n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1,2\}$, on a :

$$\frac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}=\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}\times\frac{n^2(n-1)^2}{2n+2}=\frac{6(n+1)}{2(n-1)}\times\frac{n(n-1)}{2(n+1)}=\frac{3}{2}n.$$

1.7 De $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, on a : $\displaystyle\frac{\sum_{k=0}^{n^2}k}{\sum_{k=0}^{n}k}=\frac{\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\frac{n^2(n^2+1)}{2}\,\frac{2}{n(n+1)}=\frac{n(n^2+1)}{n+1}=\frac{n^3+n}{n+1}.$

1.8 a) On trouve $\dfrac{29}{6}=\dfrac{4\times6+5}{6}=4+\dfrac{5}{6}.$

1.8 b) On trouve $\dfrac{k}{k-1}=\dfrac{k-1+1}{k-1}=1+\dfrac{1}{k-1}.$

1.8 c) On trouve $\dfrac{3x-1}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+5}{x-2}=3+\dfrac{5}{x-2}.$

1.9 Pour $t\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on a :

$$A=\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t)^2}=\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2}-\frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{1+2t+t^2-\big(1+t^2\big)}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}.$$

Donc, $AB=\left(\dfrac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}\right)\times\big(1+t^2\big)(1+t)^2=2t.$

1.10 a) $\dfrac{3}{5}=\dfrac{27}{45}>\dfrac{5}{9}=\dfrac{25}{45}$

1.10 c) $\dfrac{125}{25}=5=\dfrac{105}{21}$

1.11 Nous allons étudier les produits en croix.

On sait que $A=B$, si et seulement si $33\ 215\times208\ 341=66\ 317\times104\ 348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impairs, il est impair. Par contre, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée. A et B ne sont pas égaux.

1.12 On ré-écrit $A=\dfrac{10^5+1}{10^6+1}$ et $B=\dfrac{10^6+1}{10^7+1}$. Nous allons étudier les produits en croix.

D'une part calculons : $(10^5+1)\times(10^7+1)=10^{12}+10^7+10^5+1.$

D'autre part : $(10^6+1)^2=10^{12}+2\times10^6+1.$

Comme $(10^5+1)\times(10^7+1)>(10^6+1)\times(10^6+1)$, on obtient : $A>B$.

Fiche n° 2. Puissances

Réponses

2.1 a) .... $\boxed{10^8}$

2.1 b) .... $\boxed{10^{15}}$

2.1 c) .... $\boxed{10^2}$

2.1 d) .... $\boxed{10^{-2}}$

2.1 e) .... $\boxed{10^4}$

2.1 f) .... $\boxed{10^{-8}}$

2.2 a) .... $\boxed{15^4}$

2.2 b) .... $\boxed{5^{-6}}$

2.2 c) .... $\boxed{2^7}$

2.2 d) .... $\boxed{(-7)^{-2}}$

2.2 e) .... $\boxed{3^5}$

2.2 f) .... $\boxed{3^{28}}$

2.3 a) ...... $\boxed{2^{-4}\cdot 3^{-1}}$

2.3 b) .... $\boxed{2^{21}\cdot 3}$

2.3 c) .... $\boxed{2}$

2.3 d) .... $\boxed{2^{38}\cdot 3^{26}}$

2.4 a) .... $\boxed{8}$

2.4 b) .... $\boxed{11}$

2.4 c) .... $\boxed{3^{10}}$

2.4 d) .... $\boxed{2^6\cdot 5}$

2.5 a) .... $\boxed{\dfrac{x}{x+1}}$

2.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{x-2}}$

2.5 c) .... $\boxed{\dfrac{2x}{x+1}}$

2.5 d) .... $\boxed{\dfrac{2}{x-2}}$

Corrigés

2.3 a) $\dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 6^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 2^{-1}\cdot 3^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^{4-1}\cdot 2^{8-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^3\cdot 2^7} = 2^{3-7}\cdot 3^{2-3} = 2^{-4}\cdot 3^{-1}.$

2.3 b) On factorise : $2^{21}+2^{22} = 2^{21}+2^{21}\cdot 2 = 2^{21}\cdot(1+2) = 2^{21}\cdot 3.$

2.3 c) On factorise au numérateur et au dénominateur : $\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}} = \dfrac{(3+1)\cdot 3^{21}}{(3-1)\cdot 3^{21}} = \dfrac{4}{2} = 2.$

2.3 d) On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n = a^n$ lorsque n est pair : $\dfrac{\left(3^2\cdot(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5\cdot 2^3\right)^{-2}} = \dfrac{3^{16}\cdot 2^{32}}{3^{-10}\cdot 2^{-6}} = 2^{38}\cdot 3^{26}.$

2.4 a) On fait apparaître les facteurs premiers 2 et 3 : $\dfrac{8^{17}\cdot 6^{-6}}{9^{-3}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{3\cdot 17}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-6}}{3^{2\cdot(-3)}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{51-6}\cdot 3^{-6}}{3^{-6}\cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8.$

2.4 b) Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\dfrac{55^2\cdot 121^{-2}\cdot 125^2}{275\cdot 605^{-2}\cdot 25^4} = \dfrac{(5\cdot 11)^2\cdot(11^2)^{-2}\cdot(5^3)^2}{5^2\cdot 11\cdot(11^2\cdot 5)^{-2}\cdot(5^2)^4} = \dfrac{5^8\cdot 11^{-2}}{5^8\cdot 11^{-3}} = 11.$

2.4 c) On fait apparaître les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\dfrac{12^{-2}\cdot 15^4}{25^2\cdot 18^{-4}} = \dfrac{(2^2)^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^4\cdot 5^4}{(5^2)^2\cdot 2^{-4}\cdot(3^2)^{-4}} = \dfrac{2^{-4}\cdot 3^2\cdot 5^4}{2^{-4}\cdot 3^{-8}\cdot 5^4} = 3^{10}.$

2.4 d) Même méthode que précédemment : $\dfrac{36^3\cdot 70^5\cdot 10^2}{14^3\cdot 28^2\cdot 15^6} = \dfrac{2^6\cdot 3^6\cdot 2^5\cdot 5^5\cdot 7^5\cdot 2^2\cdot 5^2}{2^3\cdot 7^3\cdot 2^4\cdot 7^2\cdot 3^6\cdot 5^6} = \dfrac{2^{13}\cdot 3^6\cdot 5^7\cdot 7^5}{2^7\cdot 3^6\cdot 5^6\cdot 7^5} = 2^6\cdot 5.$

2.5 a) On met au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires : $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x^2-x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x}{x+1}$

2.5 b) Même méthode : $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{8}{x^2-4} = \dfrac{2(x-2)-(x+2)}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$

2.5 c) On commence par simplifier les puissances superflues, puis c'est le même principe que précédemment : $\dfrac{x^2}{x^2-x}+\dfrac{x^3}{x^3+x^2}-\dfrac{2x^2}{x^3-x} = \dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x}{x+1}$

2.5 d) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+2}{x^2-4}+\dfrac{2}{x^2-2x} = \dfrac{1}{x}+\dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{x-2+x}{x(x-2)}+\dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{2}{x-2}$

Fiche n° 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) .... $\boxed{8x^3 - 6x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{8}}$

3.1 b) .... $\boxed{x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1}$

3.1 c) .... $\boxed{x^5 - x^3 + x^2 - 1}$

3.1 d) .... $\boxed{x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1}$

3.1 e) .... $\boxed{x^5 - x^3 - x^2 + 1}$

3.1 f) .... $\boxed{x^4 + x^2 + 1}$

3.2 a) .... $\boxed{-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4}$

3.2 b) .... $\boxed{-28 + 21x}$

3.2 c) .... $\boxed{2 + x^3 - x^4 - x^5}$

3.2 d) .... $\boxed{-1 - 3x - 3x^2 + x^3}$

3.2 e) .... $\boxed{1 + x^4}$

3.2 f) .... $\boxed{1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4}$

3.3 a) .... $\boxed{-6(6x + 7)}$

3.3 b) .... $\boxed{4(5x + 4)(-5x + 1)}$

3.3 c) .... $\boxed{2(3x - 4)(10x + 3)}$

3.3 d) .... $\boxed{-8(x + 1)(x + 16)}$

3.4 a) .... $\boxed{(x - 1)^2}$

3.4 b) .... $\boxed{(x + 2)^2}$

3.4 c) .... $\boxed{(x + 1)(x + 2)}$

3.5 a) .... $\boxed{(x + y - z)(x + y + z)}$

3.5 b) .... $\boxed{3(14x + 3y)(-4x + y)}$

3.5 c) .... $\boxed{(x + 1)(y + 1)}$

3.5 d) .... $\boxed{(x - 1)(y - 1)}$

3.5 e) .... $\boxed{(x + y)(x + 1)^2}$

3.5 f) .... $\boxed{\left(a^2 + b^2\right)\left(y - 4x^2\right)\left(y + 4x^2\right)}$

Corrigés

3.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

....

3.1 b) On peut écrire : $(x - 1)^3\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right)\left(x^2 + x + 1\right) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$. Pour être “efficace”, il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p) = abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3) \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

....

3.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ et $(x+1)\left(x^2 - x + 1\right) = x^3 + 1$, on a facilement :

$$(x + 1)^2(x - 1)\left(x^2 - x + 1\right) = [(x + 1)(x - 1)]\left[(x + 1)\left(x^2 - x + 1\right)\right] = \left(x^2 - 1\right)\left(x^3 + 1\right) = x^5 - x^3 + x^2 - 1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

....

3.1 d) On calcule : $(x + 1)^2(x - 1)\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^2 + 2x + 1\right)\left(x^3 - 1\right) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$.

....

3.1 e) On calcule : $(x - 1)^2(x + 1)\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^2 - 1\right)\left(x^3 - 1\right) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$.

....

3.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x + 7$. On calcule alors

$$-(6x + 7)(6x - 1) + 36x^2 - 49 = -(6x + 7)(6x - 1) + (6x)^2 - 7^2 = (6x + 7)[-(6x - 1) + 6x - 7] = -6(6x + 7)$$

.

....

3.3 b) On calcule $25 - (10x + 3)^2 = 5^2 - (10x + 3)^2 = (10x + 8)(-10x + 2) = 4(5x + 4)(-5x + 1)$.

3.4 c) La forme canonique est $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$. On en déduit la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2-b^2=\dots$

3.5 b) On calcule $x^2+6xy+9y^2-169x^2=(x+3y)^2-(13x)^2=(14x+3y)(-12x+3y)=3(14x+3y)(-4x+y)$.

3.5 e) On calcule $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y=(x+y)(x^2+2x+1)=(x+y)(x+1)^2$.

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

4.1 a) .... $\boxed{5}$

4.1 b) .... $\boxed{\sqrt{3}-1}$

4.1 c) .... $\boxed{-\sqrt{3}+2}$

4.1 d) .... $\boxed{\sqrt{7}-2}$

4.1 e) .... $\boxed{\pi-3}$

4.1 f) .... $\boxed{|3-a|}$

4.2 a) .... $\boxed{20}$

4.2 b) .... $\boxed{9+4\sqrt{5}}$

4.2 c) .... $\boxed{1+\sqrt{3}}$

4.2 d) .... $\boxed{3+\sqrt{2}}$

4.2 e) .... $\boxed{12\sqrt{7}}$

4.2 f) .... $\boxed{12}$

4.2 g) .... $\boxed{9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}}$

4.2 h) .... $\boxed{10}$

4.3 a) .... $\boxed{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}}$

4.3 b) .... $\boxed{3-2\sqrt{2}}$

4.3 c) .... $\boxed{1-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$

4.3 d) .... $\boxed{\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2}$

4.3 e) .... $\boxed{-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

4.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}}$

4.3 g) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.3 h) .... $\boxed{50-25\sqrt{3}}$

4.4 .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$

Corrigés

4.1 a) Quand a est un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a donc $\sqrt{(-5^2)}=5$.

....

4.1 f) On trouve $|3-a|$, c'est-à-dire $3-a$ si $a \leqslant 3$ et $a-3$ si $a \geqslant 3$.

....

4.2 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=1+\sqrt{3}.$$

....

4.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\\ &= \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{2^2-2}=\frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}\\ &= 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}.\end{aligned}$$

....

4.4 On pose $A := \dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. On a :

$$A = \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)\left(1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer. On a

$$A = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)}{\left(4+2\sqrt{6}\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)} = \frac{4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}-4+2\sqrt{6}}{16-24} = \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

Ainsi, on a $\boxed{\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$: ce qu'on cherchait.

Remarque : on pouvait aussi faire un autre type de quantité conjuguée :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

Fiche n° 5. Équations du second degré

Réponses

5.1 a) .... $\boxed{3, 3}$

5.1 b) .... $\boxed{-1/3, -1/3}$

5.1 c) .... $\boxed{2, -6}$

5.1 d) .... $\boxed{2, 3}$

5.1 e) .... $\boxed{0, \text{ donc } 5}$

5.1 f) .... $\boxed{0, \text{ donc } -3/2}$

5.1 g) .... $\boxed{\varnothing}$

5.1 h) .... $\boxed{1 \text{ donc } -5}$

5.1 i) .... $\boxed{1 \text{ donc } 8/3}$

5.1 j) .... $\boxed{-1 \text{ donc } -19/5}$

5.2 a) .... $\boxed{6, 7}$

5.2 b) .... $\boxed{-3, -5}$

5.2 c) .... $\boxed{-7, -11}$

5.2 d) .... $\boxed{-3, 11}$

5.2 e) .... $\boxed{a, b}$

5.2 f) .... $\boxed{a-b, a+b}$

5.3 a) .... $\boxed{2/3}$

5.3 b) .... $\boxed{-2/7}$

5.3 c) .... $\boxed{-1/m}$

5.3 d) .... $\boxed{2m/(m+3)}$

5.4 a) .... $\boxed{a = 2 \text{ et } b = 3}$

5.4 b) .... $\boxed{a = -2 \text{ et } b = 1}$

5.4 c) .... $\boxed{a = -3 \text{ et } b = 5}$

5.4 d) .... $\boxed{a = 1/2 \text{ et } b = 8}$

5.4 e) .... $\boxed{a = 1 \text{ et } b = 3\sqrt{7}}$

5.5 a) .... $\boxed{]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[}$

5.5 b) .... $\boxed{[-3, 5]}$

5.5 c) .... $\boxed{]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[}$

5.5 d) .... $\boxed{]-\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[}$

Corrigés

5.1 a) C'est une identité remarquable : $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

....

5.1 c) Le nombre 2 est racine évidente, l'autre est donc -6 en regardant le produit des racines qui vaut -12.

....

5.1 e) La racine 0 est la racine évidente par excellence ; la somme des racines valant ici 5 l'autre racine est 5.

....

5.1 g) La fonction $x \longmapsto 2x^2 + 3$ est strictement postivie car elle est minorée par 3, donc elle ne s'annule pas.

....

5.2 a) Ici on cherche des racines un peu moins évidentes : on remplace le problème par le problème équivalent de la détermination de deux nombres x_1, x_2 dont le produit vaut 42 et la somme 13. On teste donc les factorisations évidentes de 42, ici $42 = 6 \times 7$ et $13 = 6 + 7$.

....

5.2 b) On cherche deux nombres dont le produit vaut 15 et la somme -8 : les nombres -3 et -5 conviennent.

....

5.5 a) Un trinôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur de l'intervalle des racines, et du signe opposé entre les racines. Ici, les racines sont $\sqrt{2}$ et 1, le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement négatif sur $]1, \sqrt{2}[$.

....

5.5 b) Les racines sont -5 et 3. Le trinôme est donc strictement négatif sur $]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ et strictement positif sur $]-3, 5[$.

....

5.5 c) Ici, les racines sont -1 et $2/3$. Le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, -1[\cup]2/3, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1, 2/3[$.

....

5.5 d) Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit ! Donc le quotient considéré est strictement positif sur $]-\infty, -1/2[\cup]4, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1/2, 4[$ (attention à l'annulation du dénominateur !).

....

Fiche n° 6. Exponentielle et logarithme

Réponses

6.1 a) .... $\boxed{4\ln 2}$

6.1 b) .... $\boxed{9\ln 2}$

6.1 c) .... $\boxed{-3\ln 2}$

6.1 d) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$

6.1 e) .... $\boxed{3\ln 2}$

6.1 f) .... $\boxed{2\ln 2 + 2\ln 3}$

6.2 a) .... $\boxed{-\ln 3 - 2\ln 2}$

6.2 b) .... $\boxed{2\ln 3 - 2\ln 2}$

6.2 c) .... $\boxed{\ln 3 + 11\ln 2}$

6.2 d) .... $\boxed{3\ln 5 + 2\ln 2}$

6.2 e) .... $\boxed{-2\ln 5 + 4\ln 2}$

6.2 f) .... $\boxed{2\ln 5 - 2\ln 2}$

6.3 .... $\boxed{-2\ln 2 - 2\ln 5}$

6.4 a) .... $\boxed{8}$

6.4 b) .... $\boxed{\frac{1}{2}}$

6.4 c) .... $\boxed{\frac{1}{3}}$

6.4 d) .... $\boxed{\frac{1}{9}}$

6.4 e) .... $\boxed{-\frac{1}{2}}$

6.4 f) .... $\boxed{\frac{3}{2}}$

6.5 a) .... $\boxed{-2}$

6.5 b) .... $\boxed{\frac{1}{\ln 2}}$

6.5 c) .... $\boxed{-17}$

6.5 d) .... $\boxed{1}$

6.5 e) .... $\boxed{-1}$

6.5 f) .... $\boxed{e}$

6.6 a) .... $\boxed{\mathbb{R}}$

6.6 b) .... $\boxed{\text{ok}}$

6.6 c) .... $\boxed{1}$

6.6 d) .... $\boxed{\text{-1}}$

6.7 a) .... $\boxed{x + \ln 2}$

6.7 b) .... $\boxed{\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+x}}}$

6.7 c) .... $\boxed{\ln|x-1|}$

6.7 d) .... $\boxed{-\frac{1}{1+x}}$

6.7 e) .... $\boxed{\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}}$

6.8 a) .... $\boxed{x \geqslant \frac{\ln 12 + 5}{3}}$

6.8 b) .... $\boxed{x \in [0,1]}$

6.8 c) .... $\boxed{x \geqslant \frac{2}{e}}$

6.8 d) .... $\boxed{x \geqslant -\frac{1}{12}}$

6.8 e) .... $\boxed{\varnothing}$

6.8 f) .... $\boxed{\frac{-13-\sqrt{273}}{2}}$

Corrigés

6.1 a) On a $16 = 4^2 = 2^4$ donc $\ln 16 = 4\ln 2$.

6.1 c) On a $0{,}125 = \frac{1}{8}$ donc $\ln 0{,}125 = -\ln 8 = -3\ln 2$.

6.1 e) On a $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ donc $\ln 72 - 2\ln 3 = (3\ln 2 + 2\ln 3) - 2\ln 3 = 3\ln 2$.

6.2 c) On a $0{,}875 = \frac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned}\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0{,}875) &= (\ln 3 + \ln 7) + 2(\ln 2 + \ln 7) - 3(\ln 7 - \ln 8)\\ &= \ln 3 + 2\ln 3 + 3 \times 3\ln 2 = 3\ln 3 + 11\ln 2.\end{aligned}$$

6.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln 98 - \ln 99) + (\ln 99 - \ln 100)$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

On peut écrire plus rigoureusement ce calcul :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{99} \ln \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{99} (\ln k - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{j=2}^{100} \ln j \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k+1$ d'où finalement $A = \ln 1 - \ln 100 = -2(\ln 2 + \ln 5)$.

....

6.5 b) On a $\mathrm{e}^{-\ln \ln 2} = \mathrm{e}^{(-1)\ln(\ln 2)} = (\ln 2)^{-1} = \dfrac{1}{\ln 2}$.

....

6.5 e) On a $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\exp(-\ln \mathrm{e}^2)\right) = \dfrac{1}{2}(-\ln \mathrm{e}^2)) = \dfrac{1}{2} \times (-2) = -1$.

....

6.8 f) Attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Pour la première équation, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big( ]61, +\infty[\cap]-\infty, -7[\Big)$, qui est l'ensemble vide, donc la première équation n'admet aucune solution.

Pour la seconde, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big( ]-\infty, -7[\cup]61, +\infty[\Big)$, c'est-à-dire dans l'intervalle $]-\infty, -7[$. Dans ce cas, un réel x appartenant à $]-\infty, -7[$ est solution de l'équation si et seulement si x vérifie $x^2 + 13x - 26 = 0$. Or, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-13 - \sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-13 + \sqrt{273}}{2}$. Seul x_1 convient car $x_1 \in]-\infty, -7[$ et $x_2 \notin]-\infty, -7[$.

....

Fiche n° 7. Trigonométrie

Réponses

7.1 a) .... $\boxed{0}$

7.1 b) .... $\boxed{0}$

7.1 c) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

Corrigés

Fiche nº 8. Dérivation

Réponses

8.1 a) $\boxed{6x^2 + 2x - 11}$

8.1 b) $\boxed{5x^4 - 6x^2 + 4x - 15}$

8.1 c) $\boxed{(2x^2 - 2x + 10)\exp(2x)}$

8.1 d) $\boxed{(6x - 1)\ln(x - 2) + \dfrac{3x^2 - x}{x - 2}}$

8.2 a) $\boxed{5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)}$

8.2 b) $\boxed{4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)}$

8.2 c) $\boxed{8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4}$

8.2 d) $\boxed{-3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x))}$

8.3 a) $\boxed{\dfrac{2x}{x^2 + 1}}$

8.3 b) $\boxed{\dfrac{1}{x\ln(x)}}$

8.3 c) $\boxed{(-2x^2 + 3x + 1)\exp(x^2 + x)}$

8.3 d) $\boxed{6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))}$

8.4 a) $\boxed{\dfrac{(2x + 3)(2\sin(x) + 3) - (x^2 + 3x) \times 2\cos(x)}{(2\sin(x) + 3)^2}}$

8.4 b) $\boxed{\dfrac{2 - 3x}{2\sqrt{x}(3x + 2)^2}}$

8.4 c) $\boxed{-2\dfrac{(x^2 + 1)\sin(2x + 1) + x\cos(2x + 1)}{(x^2 + 1)^2}}$

8.4 d) $\boxed{\dfrac{(4x + 3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}}$

8.5 a) $\boxed{\dfrac{10x - 5}{(3 - x)^2(2 + x)^2}}$

8.5 b) $\boxed{\dfrac{2}{x + 1}\left(x + \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)}$

8.5 c) $\boxed{\dfrac{2x^2 + 2x + 5}{(x + 2)(x - 1)^2}}$

8.5 d) $\boxed{\dfrac{x^2}{(x + 1)^2}}$

8.5 e) $\boxed{\dfrac{2}{x(1 - \ln(x))^2}}$

Corrigés

8.1 a) On calcule : $f'(x) = (2x + 3)(2x - 5) + (x^2 + 3x + 2) \times 2 = 6x^2 + 2x - 11$.

8.1 b) On calcule : $f'(x) = (3x^2 + 3)(x^2 - 5) + (x^3 + 3x + 2) \times 2x = 5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$.

8.1 c) On calcule : $f'(x) = (2x - 2)\exp(2x) + (x^2 - 2x + 6) \times 2\exp(2x) = (2x^2 - 2x + 10)\exp(2x)$.

8.1 d) On calcule : $f'(x) = (6x - 1)\ln(x - 2) + (3x^2 - x) \times \dfrac{1}{x - 2} = (6x - 1)\ln(x - 2) + \dfrac{3x^2 - x}{x - 2}$.

8.2 a) On calcule : $f'(x) = 5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$.

8.2 b) On calcule : $f'(x) = 2(2x^3 + 4x - 1)(6x^2 + 4) = 4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$.

8.2 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin(x) + 2\cos(x))(\cos(x) - 2\sin(x)) = 2(\sin(x)\cos(x) - 2\sin^2(x) + 2\cos^2(x) - 4\cos(x)\sin(x) \\ &= -6\cos(x)\sin(x) - 4\sin^2(x) + 4\cos^2(x) = -6\cos(x)\sin(x) - 4(1 - \cos^2(x)) + 4\cos^2(x) \\ &= 8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4. \end{aligned}$$

8.2 d) On calcule : $f'(x) = 3(3\cos(x) - \sin(x))^2(-3\sin(x) - \cos(x)) = -3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x))$.
En développant, on trouve : $f'(x) = -54\cos^2(x)\sin(x) - 78\cos^3(x) - 9\sin(x) + 51\cos(x)$.

8.3 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. C'est une application directe de la formule de dérivation quand $f = \ln \circ u$.

8.3 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1/x}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

8.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\exp(x^2 + x) + (2 - x)\exp(x^2 + x) \times (2x + 1) = (-1 + (2 - x)(2x + 1))\exp(x^2 + x) \\ &= (-1 + 4x + 2 - 2x^2 - x)\exp(x^2 + x) = (-2x^2 + 3x + 1)\exp(x^2 + x). \end{aligned}$$

8.3 d) On calcule : $f'(x) = \exp(3\sin(2x))(3 \times 2\cos(2x)) = 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$.

8.4 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3) - (x^2+3x) \times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$. En développant le numérateur, on trouve

$$f'(x) = \frac{-2x^2\cos(x) + 4x\sin(x) - 6x\cos(x) + 6\sin(x) + 6x + 9}{(2\sin(x)+3)^2}.$$

8.4 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2) - \sqrt{x} \times 3}{(3x+2)^2} = \dfrac{\frac{3x+2}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(3x+2)^2} = \dfrac{3x+2-6x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$

8.4 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-2\sin(2x+1) \times (x^2+1) - \cos(2x+1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = -2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1) + x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$.

8.4 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - (2x^2+3x)\dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

8.5 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-(-1)}{(3-x)^2} + \dfrac{-1}{(2+x)^2} = \dfrac{(2+x)^2 - (3-x)^2}{(3-x)^2(2+x)^2} = \dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$.

8.5 b) On calcule : $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x(x+1)-1}{x+1} = \dfrac{2x^2+2x-1}{x+1}$.
Pour le trinôme $2x^2 + 2x - 1$, on calcule $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times (-1) = 12$. On a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2 \times 2} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Enfin, on a $f'(x) = \dfrac{2(x - \frac{-1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{-1+\sqrt{3}}{2})}{x+1} = \dfrac{2}{x+1}\left(x + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

8.5 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+2} - \dfrac{1 \times (x-1) - (x+2) \times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$.
On cherche les racines du trinôme $x^2 + x - 2$ dont le discriminant est $\Delta = 1 + 8 = 9$; on identifie deux racines $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. D'où la forme factorisée : $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$.

Alors : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \dfrac{3}{(x-1)^2} = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)^2} + \dfrac{3(x+2)}{(x+2)(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

Le trinôme $2x^2 + 2x + 5$ dont le discriminant est $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times 5 = -36 < 0$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

8.5 d) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} + 1 - 2\frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{1 + (x+1)^2 - 2(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1 + x^2 + 2x + 1 - 2x - 2}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

8.5 e) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1-\ln(x)) - (1+\ln(x))\frac{-1}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{2}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$.

Fiche n° 9. Primitives

Réponses

9.1 a) .... $\boxed{\ln|t+1|}$

9.1 b) .... $\boxed{-\dfrac{3}{t+2}}$

9.1 c) .... $\boxed{-\dfrac{3}{2(t+2)^2}}$

9.1 d) .... $\boxed{-\dfrac{\cos(4t)}{4}}$

9.2 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}}$

9.2 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}}$

9.3 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}\ln|1+t^3|}$

9.3 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}$

9.3 c) .... $\boxed{-\sqrt{1-t^2}}$

9.3 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}\ln(1+3t^2)}$

9.3 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln^4 t}$

9.3 f) .... $\boxed{2\sqrt{\ln t}}$

9.3 g) .... $\boxed{\ln|1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}|}$

9.3 h) .... $\boxed{-\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}$

Corrigés

9.1 a) Admet des primitives sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$.

9.1 b) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

9.1 c) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

9.1 d) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

9.2 a) Admet des primitives sur $]0,+\infty[$.

9.2 b) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Fiche nº 10. Calcul d'intégrales

Réponses

10.1 a) .... $\boxed{\text{Positif}}$

10.1 b) .... $\boxed{\text{Négatif}}$

10.1 c) .... $\boxed{\text{Positif}}$

10.2 a) .... $\boxed{14}$

10.2 b) .... $\boxed{50}$

10.2 c) .... $\boxed{\dfrac{147}{2}}$

10.2 d) .... $\boxed{-54}$

10.2 e) .... $\boxed{0}$

10.2 f) .... $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

10.3 a) .... $\boxed{8}$

10.3 b) .... $\boxed{-2}$

10.3 c) .... $\boxed{\dfrac{8}{3}}$

10.3 d) .... $\boxed{0}$

10.3 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{30}}$

10.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{2}{101}}$

10.4 a) .... $\boxed{0}$

10.4 b) .... $\boxed{1}$

10.4 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

10.4 d) .... $\boxed{18}$

10.4 e) ...... $\boxed{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}}$

10.4 f) .... $\boxed{-\ln 3}$

10.5 a) .... $\boxed{78}$

10.5 b) ..... $\boxed{2(\mathrm{e}^3 - 1)}$

10.5 c) . $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\ln\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)}$

10.5 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{6}}$

10.5 e) .... $\boxed{6}$

10.6 a) .... $\boxed{0}$

10.6 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{384}}$

10.6 c) ... $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)}$

10.6 d) .... $\boxed{\dfrac{7}{48}}$

Corrigés

10.1 a) On intègre une fonction positive et les bornes sont « dans le bon sens ».

10.1 b) $\displaystyle\int_5^{-3} |\sin 7x|\,\mathrm{d}x = -\int_{-3}^{5} |\sin 7x|\,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. Elle est positive car on intègre une fonction positive.

10.1 c) $\displaystyle\int_0^{-1} \sin x\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. sin est négative sur $[-\pi, 0]$ donc sur $[-1, 0]$, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x$ est donc négative.

10.2 a) Il s'agit de l'aire d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 7.

10.2 b) On commence par mettre les bornes « dans le bon sens » : $\displaystyle\int_7^{-3} -5\,\mathrm{d}x = -\int_{-3}^{7} -5\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{7} 5\,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale est l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 10 et 5.

10.2 c) Il s'agit de l'aire du triangle dont les sommets sont l'origine O, le point $A(7;0)$ et $B(7;21)$. Ce triangle est rectangle en A et son aire est $\dfrac{1}{2} \times AO \times AB$.

10.2 d) Les bornes sont « dans le bon sens », on peut donc interpréter l'intégrale comme une aire algébrique. Sur l'intervalle $[2, 8]$, la courbe de $f(x) = 1 - 2x$ est située sous l'axe des abscisses, l'aire algébrique sera négative.
Il s'agit de calculer l'aire du trapèze rectangle dont les sommets sont $A(2;0)$, $B(8;0)$, $C(8;-15)$ et $D(2;-3)$. L'aire de ce trapèze rectangle est $\dfrac{1}{2} \times AB \times (AD + BC) = \dfrac{1}{2} \times 6 \times (3 + 15)$.

10.2 e) Avec la relation de Chasles, on a $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sin x\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \sin x\,\mathrm{d}x$.La fonction sinus étant impaire, les aires algébriques $\displaystyle\int_{-2}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{2} \sin x\,\mathrm{d}x$ sont opposées, il suit que leur somme est nulle.

10.2 f) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique. Cette aire est composée de deux triangles rectangles (les intégrales de -2 à 0 et de 0 à 1).

10.3 a) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique d'un rectangle.

10.3 b) $\displaystyle\int_1^3 2x - 5\,\mathrm{d}x = \Big[x^2 - 5x\Big]_1^3 = (3^2 - 15) - (1^2 - 5) = -2.$

10.3 c) $\displaystyle\int_{-2}^0 x^2 + x + 1\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\Big]_{-2}^0 = 0 - \Big(\frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2\Big) = \frac{8}{3}.$

10.3 d) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

10.3 e) $\displaystyle\int_0^1 x^5 - x^4\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5\Big]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}.$

10.3 f) $\displaystyle\int_1^{-1} x^{100}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{101}x^{101}\Big]_1^{-1} = -\frac{2}{101}.$

10.4 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

10.4 b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,\mathrm{d}x = \Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2\sin\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = 1.$

10.4 c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

10.4 d) $\displaystyle\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{100} = 18.$

10.4 e) $\displaystyle\int_{-3}^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_{-3}^2 = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}.$

10.4 f) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-3}^{-1} = -\ln 3.$

10.5 a) $\displaystyle\int_{-1}^2 (2x+1)^3\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{8}(2x+1)^4\Big]_{-1}^2 = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78.$

10.5 b) $\displaystyle\int_{-2}^4 \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\,\mathrm{d}x = \Big[2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\Big]_{-2}^4 = 2(\mathrm{e}^3 - 1).$

10.5 c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\pi x + 2} = \Big[\frac{1}{\pi}\ln|\pi x + 2|\Big]_0^1 = \frac{1}{\pi}\ln\Big(\frac{\pi+2}{2}\Big).$

10.5 d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{3}\cos(3x)\Big]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}.$

10.5 e) $\displaystyle\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\Big]_0^{33} = \frac{2}{3}(10-1) = 6.$

10.6 a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x-2}{x^2 - 4x + 5}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{2}\ln(x^2 - 4x + 5)\Big]_1^3 = 0.$

10.6 b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^5\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{6}(\cos x)^6\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{6}\Big(\frac{1}{2}\Big)^6.$

10.6 c) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$

10.6 d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,\frac{-1}{3}\,\frac{1}{(x^2+1)^3}\right]_0^1 = \frac{7}{48}.$

Fiche n° 11. Suites numériques

Réponses

11.1 a) .... $\boxed{\dfrac{12}{5}}$

11.1 b) .... $\boxed{8}$

11.1 c) .... $\boxed{\dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}}$

11.1 d) .... $\boxed{\dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}}$

11.2 a) .... $\boxed{13}$

11.2 b) .... $\boxed{29}$

11.3 a) .... $\boxed{2^{\frac{1}{8}}}$

11.3 b) .... $\boxed{2^{\frac{1}{64}}}$

11.4 a) .... $\boxed{2}$

11.4 b) .... $\boxed{2}$

11.5 a) .... $\boxed{2n\ln(n)}$

11.5 b) .... $\boxed{4n\ln(2n)}$

11.6 a) .... $\boxed{21}$

11.6 b) .... $\boxed{10\ 000}$

11.6 c) .... $\boxed{2\ 001}$

11.6 d) .... $\boxed{10\ 201}$

11.7 a) .... $\boxed{\dfrac{17}{24}}$

11.7 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{24}}$

11.8 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{512}}$

11.8 b) .... $\boxed{\dfrac{3069}{512}}$

11.8 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{1\ 024}}$

11.8 d) .... $\boxed{\dfrac{6141}{1024}}$

11.9 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}}$

11.9 b) .... $\boxed{\dfrac{11\sqrt{5}}{25}}$

Corrigés

11.1 a) $u_0 = \dfrac{2\times 0+3}{5}\times 2^{0+2} = \dfrac{12}{5}$.

11.1 b) $u_1 = \dfrac{2\times 1+3}{5}\times 2^{1+2} = \dfrac{5}{5}\times 8 = 8$.

11.1 c) $u_n = \dfrac{2(n+1)+3}{5}\times 2^{(n+1)+2} = \dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}$.

11.1 d) $u_{3n} = \dfrac{2\times 3n+3}{5}\times 2^{3n+2} = \dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}$

11.2 a) $u_1 = 2\times 1+3 = 5$ et $u_2 = 2\times 5+3 = 13$.

11.2 b) On calcule : $u_3 = 2\times 13+3 = 29$.

11.3 a) $v_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^3}} = 2^{\frac{1}{8}}$.

11.3 b) $v_6 = 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = 2^{\frac{1}{2^6}} = 2^{\frac{1}{64}}$.

11.4 a) $w_1 = \dfrac{1}{2}\times 2^2 = \dfrac{4}{2} = 2$ et, de même, $w_2 = 2$.

11.4 b) Il faudrait formaliser une preuve par récurrence.

11.5 a) $t_{2n} = \ln((2n)^{2n}) - \ln(2^{2n}) = 2n\ln(2) + 2n\ln(n) - 2n\ln(2) = 2n\ln(n)$.

11.5 b) $t_{4n} = \ln((4n)^{4n}) - \ln(2^{4n}) = 8n\ln(2) + 4n\ln(n) - 4n\ln(2) = 4n\ln(2) + 4n\ln(n) = 4n\ln(2n)$.

11.6 a) $a_{100} = a_0 + 100\times 2 = 201$.

11.6 b) $s_{100} = \dfrac{100 \times (1+199)}{2} = \dfrac{100 \times 200}{2} = 100^2 = 10\ 000.$

11.6 c) $a_{1\ 000} = 1 + 1\ 000 \times 2 = 2\ 001.$

11.6 d) $s_{101} = \dfrac{101 \times (1+201)}{2} = \dfrac{101 \times 202}{2} = 101^2 = 10\ 201.$

11.7 a) $b_{102} = \dfrac{b_{101} + b_{103}}{2} = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{2} = \dfrac{\frac{8+9}{12}}{2} = \dfrac{17}{24}.$

11.7 b) $r = u_{102} - u_{101} = \dfrac{17}{24} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{24}.$

11.8 a) $g_9 = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = \dfrac{3}{2^9} = \dfrac{3}{512}.$

11.8 b) $\sigma_{10} = g_0 \times \dfrac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} = 6\dfrac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \dfrac{3 \times 1\ 023}{512} = \dfrac{3069}{512}.$

11.8 c) $g_{10} = g_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = 3 \times \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{3}{1\ 024}.$

11.8 d) $\sigma_{11} = 6\dfrac{2^{11} - 1}{2^{11}} = \dfrac{3 \times 2\ 047}{1\ 024} = \dfrac{6141}{1024}.$

11.9 a) $h_{12} = \sqrt{h_{11} \times h_{13}} = \sqrt{\dfrac{5\pi \times 11\pi}{11 \times 25}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{5}} = \dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}.$

11.9 b) $r = \dfrac{h_{12}}{h_{11}} = \dfrac{\frac{\pi\sqrt{5}}{5}}{\frac{5\pi}{11}} = \dfrac{\pi\sqrt{5} \times 11}{5 \times 5\pi} = \dfrac{11\sqrt{5}}{25}.$