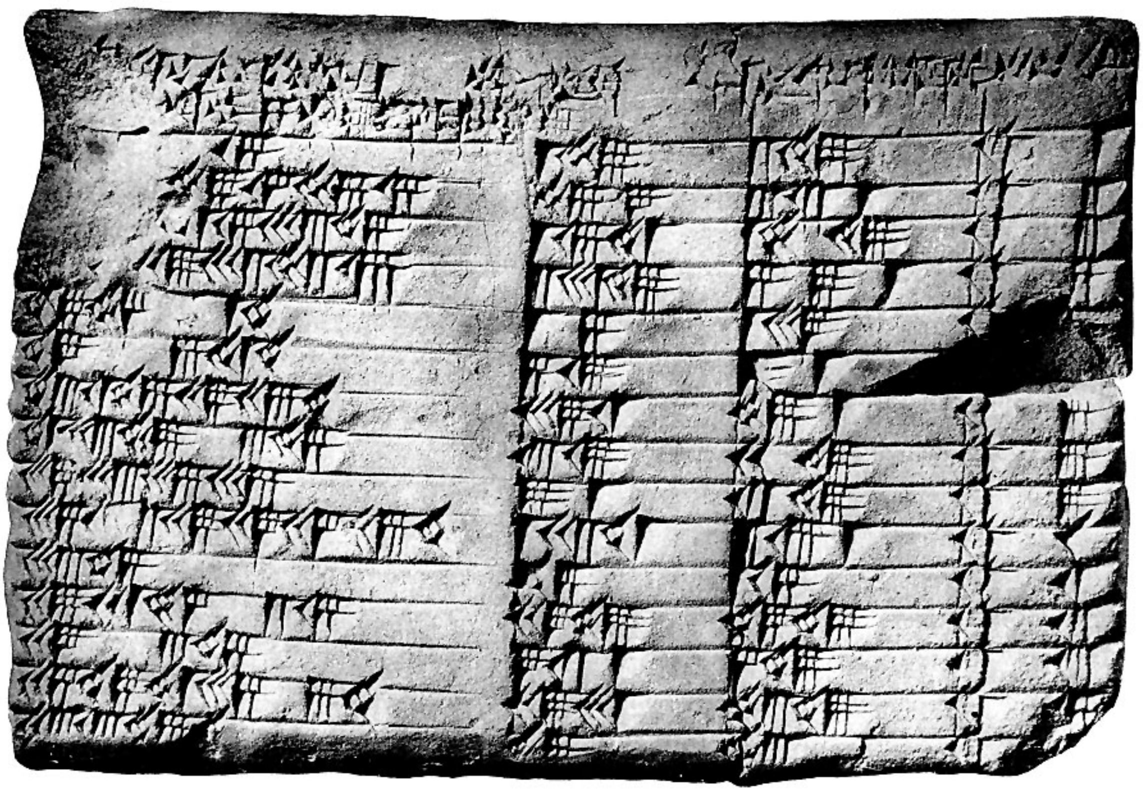
Cahier de vacances
De la bio 1 à la bio2

— pratique et entraînement —



Plimpton 322, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets (a, b, c) de nombres entiers vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

Ce cahier de calcul "BCPST" est une sélection d'exercices choisis dans "le cahier de calcul" écrit par les auteurs dont les noms suivent.

Coordination

Colas BARDAVID

Équipe des participants

Vincent BAYLE, Romain BASSON, Olivier BERTRAND, Ménard BOURGADE, Julien BUREAUX, Alain CAMANES, Mathieu CHARLOT, Mathilde COLIN DE VERDIÈRE, Keven COMMAULT, Miguel CONCY, Rémy EUPHERTE, Hélène GROS, Audrey HECHNER, Florian HECHNER, Marie HÉZARD, Nicolas LAILLET, Valérie LE BLANC, Thierry LIMOGES, Quang-Thai NGO, Xavier PELLEGRIN, Fabien PELLEGRINI, Jean-Louis POURTIER, Valérie ROBERT, Jean-Pierre TÉCOURT, Guillaume TOMASINI, Marc TENTI

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).

La photographie de la couverture vient de Wikipedia.

Version BCPST — 30 juin 2022

Sommaire

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est conçu pour vous aider à préparer votre entrée en seconde année de BCPST.

C'est la première version de ce cahier. Il peut y avoir quelques erreurs (peu), il y a des exercices trop difficiles... Pas de panique, il ne s'agit pas de tout faire en bloc (ni de tout faire), mais de re-solliciter au maximum les compétences acquises au lycée et surtout en BCPST1. Et de travailler ses points faibles.

Les techniques présentées dans ce cahier doivent être maitrisées pour bien suivre en BCPST2. Il y a bien sûr des exercices plus difficiles mais leur compréhension à l'aide du corrigé peut être profitable.

Plus vous êtes ambitieux dans vos études, plus vous devez approfondir ce cahier !

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études post-Bac.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant de voir d'un seul coup d'œil les différentes fiches et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie **exercices**, centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Les réponses brutes ainsi que les corrigés détaillés, qui sont à la fin du cahier.

Chaque fiche de calcul est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis.
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (), deux (), trois () ou quatre () horloges.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Comment l'utiliser ?

Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple.

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme.

Une bonne connaissance du cours combinée à une plus grande aisance en calcul, c'est un très beau tremplin vers la réussite en prépa ou dans vos études !

Yannick Gâtel
Professeur de Mathématiques en BCPST2
Lycée Joffre

Énoncés

Fractions

Prérequis
Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $\dfrac{32}{40}$ ....

b) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2}$ ....

c) $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$ ....

d) $\dfrac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$ ....

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3}$ ....

b) $\dfrac{2}{3} - 0{,}2$ ....

c) $\dfrac{36}{25} \times \dfrac{15}{12} \times 5$ ....

d) $-\dfrac{2}{15} \div (-\dfrac{6}{5})$ ....

Calcul 1.3

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7})$ ....

b) $\left(\dfrac{136}{15} - \dfrac{28}{5} + \dfrac{62}{10}\right) \times \dfrac{21}{24}$ ....

c) $\dfrac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$ ....

d) $\dfrac{1\ 978 \times 1\ 979 + 1\ 980 \times 21 + 1958}{1\ 980 \times 1\ 979 - 1\ 978 \times 1\ 979}$ ....

Calcul 1.4 — Un petit calcul.

Écrire $\dfrac{0{,}5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \dfrac{0{,}5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0{,}2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3{,}5}$ sous forme d'une fraction irréductible. ....

Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.

En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\dfrac{2\ 022}{(-2\ 022)^2 + (-2\ 021)(2\ 023)}$ ..

b) $\dfrac{2\ 021^2}{2\ 020^2 + 2\ 022^2 - 2}$ ....

c) $\dfrac{1\ 235 \times 2\ 469 - 1\ 234}{1\ 234 \times 2\ 469 + 1\ 235}$ ....

d) $\dfrac{4\ 002}{1\ 000 \times 1\ 002 - 999 \times 1\ 001}$ ...

Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

a) $\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ ....

b) $\dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux. ....

c) $\dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1, 2\}$. ....

Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.

Simplifier $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n^2} k}{\sum\limits_{k=0}^{n} k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1 + 2 + \cdots + p = \dfrac{p(p+1)}{2}$. .....

Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.

Soit $k \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ et $x \in \mathbb{R} \backslash \{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \dfrac{b}{c}$ avec $b < c$.

a) $\dfrac{29}{6}$ ...... b) $\dfrac{k}{k-1}$ ... c) $\dfrac{3x-1}{x-2}$ ..

Calcul 1.9 — Un produit de fractions.

Soit $t \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$. On donne $A = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{(1+t)^2}$ et $B = \big(1+t^2\big)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible. ....

Comparaison

Calcul 1.10 — Règles de comparaison.

Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

a) $\dfrac{3}{5} \dots \dfrac{5}{9}$ .... b) $\dfrac{12}{11} \dots \dfrac{10}{12}$ ...... c) $\dfrac{125}{25} \dots \dfrac{105}{21}$ ....

Calcul 1.11 — Produit en croix.

Les nombres $A = \dfrac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \dfrac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux ? Oui ou non ? ....

Calcul 1.12 — Produit en croix.

On pose $A = \dfrac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B = \dfrac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$? ....

Réponses mélangées

$\dfrac{-1}{n(n+1)^2}$ $-\dfrac{ab}{a-b}$ 2 3 $\dfrac{12}{11} > \dfrac{10}{12}$ $\dfrac{1}{2}$ 247 $\dfrac{n^3+n}{n+1}$ $1\ 000$ $\dfrac{1}{9}$

$2t$ $2\ 022$ $\dfrac{-10}{3}$ $\dfrac{4}{5}$ $3 + \dfrac{5}{x-2}$ $\dfrac{3}{2}n$ $\dfrac{203}{24}$ $\dfrac{7}{15}$ $\dfrac{1}{6}$ $\dfrac{3}{5} > \dfrac{5}{9}$ 9

$4 + \dfrac{5}{6}$ $A > B$ 1 $\dfrac{16}{35}$ 2^5 $-2 \times 3^{3k-2}$ Non $1 + \dfrac{1}{k-1}$ $\dfrac{125}{25} = \dfrac{105}{21}$

▶ Réponses et corrigés page 63

Puissances

Prérequis
Opérations sur les puissances (produits, quotients), décompostion en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 2.1

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ ....

b) $(10^5)^3$ ....

c) $\dfrac{10^5}{10^3}$ ....

d) $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}$ ....

e) $\dfrac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$ ....

f) $\dfrac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$ ....

Calcul 2.2

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ ....

b) $(5^3)^{-2}$ ....

c) $\dfrac{2^5}{2^{-2}}$ ....

d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ ....

e) $\dfrac{6^5}{2^5}$ ....

f) $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$ ....

Calcul 2.3

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ ....

b) $2^{21} + 2^{22}$ ....

c) $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$ ....

d) $\dfrac{\left(3^2 \cdot (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \cdot 2^3\right)^{-2}}$ ....

Calcul 2.4

Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\dfrac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ ....

b) $\dfrac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ ....

c) $\dfrac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$ ....

d) $\dfrac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$ ....

Calcul 2.5

Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

a) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ ....

b) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4}$ ....

c) $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x}$ ....

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{x}{x+1}$ $\quad 15^4 \quad$ $\dfrac{2x}{x+1}$ $\quad 2^{21} \cdot 3 \quad 10^{15} \quad 11 \quad 5^{-6} \quad 2^{38} \cdot 3^{26}$

$10^2 \quad 10^8 \quad 10^{-2} \quad 2^{-4} \cdot 3^{-1} \quad 2^6 \cdot 5 \quad 3^5 \quad (-7)^{-2}$

$\dfrac{2}{x-2}$ $\quad 10^4 \quad 8 \quad 2^7 \quad 10^{-8} \quad 3^{10} \quad$ $\dfrac{1}{x-2}$ $\quad 3^{28} \quad 2$

► Réponses et corrigés page 66

Calcul littéral

Prérequis
Les identités remarquables.

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

a) $\left(2x - \dfrac{1}{2}\right)^3$ ....

b) $(x-1)^3\big(x^2+x+1\big)$ ....

c) $(x+1)^2(x-1)\big(x^2-x+1\big)$ ....

d) $(x+1)^2(x-1)\big(x^2+x+1\big)$ ....

e) $(x-1)^2(x+1)\big(x^2+x+1\big)$ ....

f) $\big(x^2+x+1\big)\big(x^2-x+1\big)$ ....

Calcul 3.2

Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x.

a) $(x-2)^2\big(-x^2+3x-1\big)-(2x-1)(x^3+2)$ ....

b) $(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)$ ....

c) $\Big((x+1)^2(x-1)\big(x^2-x+1\big)+1\Big)x-x^6-x^5+2$ ....

d) $(x+1)(x-1)^2-2\big(x^2+x+1\big)$ ....

e) $\Big(x^2+\sqrt{2}x+1\Big)\Big(1-\sqrt{2}x+x^2\Big)$ ....

f) $\big(x^2+x+1\big)^2$ ....

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.

Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$ ....

b) $25-(10x+3)^2$ ....

c) $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$ ....

d) $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$ ....

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.

Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de ax^2+bx+c est $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ (où $a\neq 0$).

a) x^2-2x+1 ....

b) x^2+4x+4 ....

c) x^2+3x+2 ....

d) $3x^2+7x+1$ ....

e) $2x^2+3x-28$ ....

f) $-5x^2+6x-1$ ....

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x+y)^2-z^2$ ....

b) $x^2+6xy+9y^2-169x^2$ ....

c) $xy+x+y+1$ ....

d) $xy-x-y+1$ ....

e) $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y$ ..

f) $y^2(a^2+b^2)+16x^4(-a^2-b^2)$ ..

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) x^4-1 ....

b) $(-9x^2+24)(8x^2+8)+64x^4-64$ ....

c) x^4+x^2+1 ....

d) $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ ....

e) $(ap+bq+cr+ds)^2+(aq-bp-cs+dr)^2+(ar+bs-cp-dq)^2+(as-br+cq-dp)^2$.

Réponses mélangées

$1+2x+3x^2+2x^3+x^4$ $\quad (a^2+b^2)(y-4x^2)(y+4x^2)$ $\quad (x+1)(x+2)$

$2+x^3-x^4-x^5$ $\quad x^5-x^3-x^2+1$ $\quad (x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$2\left(x+\frac{3-\sqrt{233}}{4}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{233}}{4}\right)$ $\quad 2(3x-4)(10x+3)$ $\quad 1+x^4$ $\quad (x-1)(x+1)(x^2+1)$

$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)$ $\quad (x+y-z)(x+y+z)$ $\quad 4(5x+4)(-5x+1)$

$-1-3x-3x^2+x^3$ $\quad x^4+x^2+1$ $\quad 3(14x+3y)(-4x+y)$ $\quad (x+1)(y+1)$

$x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ $\quad (x-1)^2$ $\quad (x+y)(x+1)^2$ $\quad -6(6x+7)$

$8x^3-6x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{8}$ $\quad -5(x-1)\left(x-\frac{1}{5}\right)$ $\quad (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ $\quad (x-1)(y-1)$ $\quad (x+2)^2$

$-2+12x-17x^2+8x^3-3x^4$ $\quad x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$ $\quad x^5-x^3+x^2-1$ $\quad -28+21x$

$-8(x^2+1)(x-4)(x+4)$ $\quad 3\left(x+\frac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\frac{7+\sqrt{37}}{6}\right)$ $\quad -8(x+1)(x+16)$

► Réponses et corrigés page 67

Fiche de calcul n° 4

004A

Racines carrées

Prérequis
Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.

Exprimer sans racine carrée les expressions suivantes.

a) $\sqrt{(-5)^2}$ ....

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$ ....

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ ....

d) $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$ ....

e) $\sqrt{(3-\pi)^2}$ ....

f) $\sqrt{(3-a)^2}$ ....

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.

Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$ ....

b) $(2+\sqrt{5})^2$ ....

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ....

d) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ ....

e) $(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2$ ....

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ ....

g) $\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ ....

h) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ ....

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3

Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ....

c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ....

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

f) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ ....

g) $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

h) $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$ ....

Calcul 4.4

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

Calculs variés

Calcul 4.5 — Avec une variable.

On considère la fonction f qui à $x>1$ associe $f(x)=\sqrt{x-1}$.

Pour tout $x>1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$ ....

b) $\dfrac{f(x+2)-f(x)}{f(x+2)+f(x)}$ ....

c) $\sqrt{x+2f(x)}$ ....

d) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ ....

e) $f(x)+4f''(x)$ ....

f) $\dfrac{f(x)}{f''(x)}$ ....

Calcul 4.6 — Mettre au carré.

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$ ....

b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

Calcul 4.7 — Méli-mélo.

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ ....

b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

c) $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$ ....

d) $3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln 3}$ ....

e) $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ ....

f) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ....

Calcul 4.8

Simplifier $\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}$.

On commencera par exprimer A^3 en fonction de A. ....

Réponses mélangées

$12\sqrt{7}$ $\quad -4(x-1)^2$ $\quad -(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ $\quad 9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}$ $\quad 20$ $\quad -\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{2}$ $\quad 1+\sqrt{5}$ $\quad 2\sqrt{2}$ $\quad \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ $\quad |3-a|$ $\quad 50-25\sqrt{3}$ $\quad 1+\sqrt{x-1}$

$\sqrt{3}-1$ $\quad 3+\sqrt{2}$ $\quad 1+\sqrt{2}$ $\quad 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$ $\quad 5$ $\quad \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}$

$\dfrac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}$ $\quad \sqrt{3}$ $\quad \sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2$ $\quad 1$ $\quad 2\sqrt{2}$ $\quad 9+4\sqrt{5}$

$\ln(1+\sqrt{2})$ $\quad 1+\sqrt{3}$ $\quad -\sqrt{3}+2$ $\quad \pi-3$ $\quad 12$ $\quad \sqrt{7}-2$ $\quad 3-2\sqrt{2}$

$1+\sqrt{2}$ $\quad -11+5\sqrt{5}$ $\quad x-\sqrt{x^2-1}$ $\quad 10$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$ $\quad 1-\sqrt{10}+\sqrt{15}$

► Réponses et corrigés page 69

Fiche de calcul n° 5

Expressions algébriques

Prérequis

Identités remarquables.
Somme des termes d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique.

Équations polynomiales

Calcul 5.1 — Cubique.

Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

a) $(a+2)^3$ ……

b) $a^5 - a^6$ ……

c) a^{12} ……

d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2}$ ……

Calcul 5.2 — Nombres complexes.

Soit i un nombre tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $x + \mathrm{i}y$ où x, y sont deux réels.

a) $(3+\mathrm{i})^2$ ……

b) $(3-\mathrm{i})^2$ ……

c) $(3-\mathrm{i})^3$ ……

d) $(3-2\mathrm{i})^3$ ……

Calcul 5.3

Même exercice.

a) $(4-5\mathrm{i})(6+3\mathrm{i})$ ……

b) $(2+3\mathrm{i})^3(2-3\mathrm{i})^3$ ……

c) $\left(-4+\mathrm{i}\sqrt{5}\right)^3$ ……

d) $\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ……

Calcul 5.4 — Puissance cinquième.

Soit a un nombre distinct de 1 tel que $a^5 = 1$. Calculer les nombres suivants :

a) $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$ ……

b) $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$ ……

c) $\displaystyle\prod_{k=0}^{1234} a^k$ ……

d) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$ ……

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} a^k$ ……

f) $\displaystyle\prod_{k=0}^{4}(2-a^k)$ ....

Réponses mélangées

$18-26\mathrm{i}$	2197	-1	$-9-46\mathrm{i}$	$-4+43\mathrm{i}\sqrt{5}$	$-a^2+1$	$4a^2-a-3$	31		
$8-6\mathrm{i}$	$7a^2+12a+7$	a^2-a-1	1	1	0	$39-18\mathrm{i}$	$8+6\mathrm{i}$	3	1

▶ Réponses et corrigés page 71

Équations du second degré

Prérequis

Relations entre coefficients et racines.
On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) possédant deux racines réelles distinctes x_1 et x_2. Alors $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ et $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$.
Si l'équation n'a qu'une racine double x_0, alors $x_0^2 = \dfrac{c}{a}$ et $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. (On prend en fait $x_0 = x_1 = x_2$ dans la formule précédente.)
Application : lorsque l'on trouve une racine évidente, on peut en déduire la seconde à l'aide de ces formules !

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices (le but EST de ne pas les utiliser) !

Recherche de racines

Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.

Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi* $0, 1, -1, 2, -2$ *ainsi éventuellement que* 3 *et* -3.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ ....

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ ....

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ ....

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ....

e) $x^2 - 5x = 0$ ....

f) $2x^2 + 3x = 0$ ....

g) $2x^2 + 3 = 0$ ....

h) $x^2 + 4x - 5 = 0$ ....

i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$ ....

j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$ ....

Calcul 6.2 — Somme et produit.

Résoudre mentalement les équations suivantes.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$ ....

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ ....

c) $x^2 + 18x + 77 = 0$ ....

d) $x^2 - 8x - 33 = 0$ ....

e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ ....

f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ....

Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.

Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine ....

b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine ....

c) $mx^2 + (2m+1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine ....

d) $(m+3)x^2 - (m^2+5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine ....

Factorisations et signe

Calcul 6.4 — Factorisation à vue.

Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x.

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x+2)(ax+b)$ ....

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x-1)(ax+b)$ ....

c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x-3)(ax+b)$ ....

d) $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{11}{2}x - 40 = (x-5)(ax+b)$ ....

e) $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x-\sqrt{7})(ax+b)$ ....

Calcul 6.5 — Signe d'un trinôme.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$ ....

b) $-x^2 + 2x + 15$ ....

c) $(x+1)(3x-2)$ ....

d) $\dfrac{x-4}{2x+1}$ ....

Réponses mélangées

$\varnothing$ $\quad a = 1$ et $b = 3\sqrt{7}$ $\quad a = -3$ et $b = 5$ $\quad a = -2$ et $b = 1$ $\quad 1$ donc $8/3$

$6, 7$ $\quad 0$, donc $-3/2$ $\quad -3, -5$ $\quad 0$, donc 5 $\quad [-3, 5]$ $\quad 2, 3$ $\quad 2/3$

$]-\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[$ $\quad -7, -11$ $\quad -2/7$ $\quad -3, 11$ $\quad]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[$

$-1/m$ $\quad a = 2$ et $b = 3$ $\quad -1/3, -1/3$ $\quad]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$ $\quad a = 1/2$ et $b = 8$

$a-b, a+b$ $\quad -1$ donc $-19/5$ $\quad 3, 3$ $\quad 2, -6$ $\quad a, b$ $\quad 2m/(m+3)$ $\quad 1$ donc -5

► Réponses et corrigés page 73

Exponentielle et logarithme

Prérequis
Exponentielle, logarithme.

Logarithmes

Calcul 7.1

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln 16$ ....

b) $\ln 512$ ....

c) $\ln 0{,}125$ ....

d) $\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{8}$ ....

e) $\ln 72 - 2\ln 3$ ....

f) $\ln 36$ ....

Calcul 7.2

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln\dfrac{1}{12}$ ....

b) $\ln(2{,}25)$ ....

c) $\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0{,}875)$ ....

d) $\ln 500$ ....

e) $\ln\dfrac{16}{25}$ ....

f) $\ln(6{,}25)$ ....

Calcul 7.3

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

$\ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \cdots + \ln\dfrac{98}{99} + \ln\dfrac{99}{100}$ ....

Calcul 7.4 — Logarithme et radicaux.

a) On pose $\alpha = \dfrac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1)$. Calculer $(1+\sqrt{2})^2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

En déduire une écriture simplifiée de α en fonction de $\ln(\sqrt{2}-1)$. ....

b) Calculer β sachant que $\ln\beta = \ln(7+5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2}+1) + 7\ln(\sqrt{2}-1)$ ....

c) Simplifier $\gamma = \ln\Big((2+\sqrt{3})^{20}\Big) + \ln\Big((2-\sqrt{3})^{20}\Big)$ ....

d) Simplifier $\delta = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. ....

Exponentielles

Calcul 7.5

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $e^{3\ln 2}$ ....

b) $\ln(\sqrt{e})$ ....

c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$ ....

d) $e^{-2\ln 3}$ ....

e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$ ....

f) $e^{\ln 3 - \ln 2}$ ....

Calcul 7.6

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-e^{-\ln\frac{1}{2}}$ ....

b) $e^{-\ln\ln 2}$ ....

c) $\ln\left(\dfrac{1}{e^{17}}\right)$ ....

d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$ ....

e) $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln e^2)}\right)$ ....

f) $\exp\left(-\dfrac{1}{3}\ln(e^{-3})\right)$ ....

Études de fonctions

Calcul 7.7 — Parité.

Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \longmapsto \ln\dfrac{2021+x}{2021-x}$ ....

b) $f_2 : x \longmapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ ....

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ ....

d) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ ....

Calcul 7.8 — Étude d'une fonction.

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. ....

b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b) = \dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$. ....

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$. ....

d) Déterminer la limite de f en $-\infty$. ....

Calcul 7.9

On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x). \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

a) $f(2e^x - 1)$ ....

b) $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ ....

c) $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$ ....

d) $xf'(x) - 1$ ....

e) $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ ....

Équations, inéquations

Calcul 7.10

Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x).

a) $e^{3x-5} \geqslant 12$ ....

b) $1 \leqslant e^{-x^2+x}$ ....

c) $e^{1+\ln x} \geqslant 2$ ....

d) $e^{-6x} \leqslant \sqrt{e}$ ....

e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ ....

f) $\ln(-x-5) = \ln \dfrac{x-61}{x+7}$ ....

Réponses mélangées

$e^{x\ln(1+x)}$	$-\dfrac{1}{1+x}$	$\dfrac{-13-\sqrt{273}}{2}$	$\varnothing$	$x + \ln 2$	$\dfrac{1}{\ln 2}$	1	$\mathbb{R}$	-2
$\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$	$17 + 12\sqrt{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$x \geqslant -\dfrac{1}{12}$	$4\ln 2$	impaire	$-\ln 3 - 2\ln 2$		
$2\ln 2 + 2\ln 3$	$\dfrac{3}{2}$	$9\ln 2$	$\dfrac{1}{2}\ln 2$	$\dfrac{25}{8}$	$\ln(\sqrt{2}-1)$	$3\ln 2$	0	impaire
-17	$x \geqslant \dfrac{\ln 12 + 5}{3}$	$x \in [0,1]$	1	$-3\ln 2$	$2\ln 3 - 2\ln 2$	$\dfrac{1}{3}$	-1	
$-2\ln 2 - 2\ln 5$	$-\dfrac{1}{2}$	-1	$\ln 3 + 11\ln 2$	$2\ln 5 - 2\ln 2$	ok	$\ln\lvert x-1\rvert$		
$\dfrac{1}{9}$	impaire	0	$3\ln 5 + 2\ln 2$	$x \geqslant \dfrac{2}{e}$	e	$-2\ln 5 + 4\ln 2$	8	impaire

► Réponses et corrigés page 75

Fiche de calcul n° 8

007A

Trigonométrie

Prérequis
Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos.
Formules d'addition et de duplication. Fonction tangente.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.1

Simplifier :

a) $\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{3\pi}{4} + \cos\dfrac{5\pi}{4} + \cos\dfrac{7\pi}{4}$.

b) $\sin\dfrac{5\pi}{6} + \sin\dfrac{7\pi}{6}$ ....

c) $\tan\dfrac{2\pi}{3} + \tan\dfrac{3\pi}{4} + \tan\dfrac{5\pi}{6} + \tan\dfrac{7\pi}{6}$

d) $\cos^2\dfrac{4\pi}{3} - \sin^2\dfrac{4\pi}{3}$ ....

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.2

Simplifier :

a) $\sin(\pi - x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ ....

b) $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

c) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ ....

d) $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ ....

Formules d'addition

Calcul 8.3

Calculer les quantités suivantes.

a) $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ (on a $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{12}$) ....

b) $\cos\dfrac{\pi}{12}$ ....

c) $\sin\dfrac{\pi}{12}$ ....

d) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ ....

Calcul 8.4

a) Simplifier : $\sin(4x)\cos(5x) - \sin(5x)\cos(4x)$ ....

b) Simplifier : $\dfrac{\sin 2x}{\sin x} - \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$ (pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$) ....

c) Simplifier : $\cos x + \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right)$ ....

d) Expliciter $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$ ....

Formules de duplication

Calcul 8.5

En remarquant qu'on a $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer :

a) $\cos \frac{\pi}{8}$ ....

b) $\sin \frac{\pi}{8}$ ....

Calcul 8.6

a) Simplifier : $\dfrac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$ (avec $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$) ....

b) Simplifier : $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$ (pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$) ....

c) Expliciter $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$ ....

Équations trigonométriques

Calcul 8.7

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ ....

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ....

c) $\sin x = \cos \frac{2\pi}{3}$ ......

d) $\tan x = -1$ ....

e) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ ....

f) $|\tan x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ......

g) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ......

h) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

i) $\cos x = \cos \frac{\pi}{7}$ ....

j) $\sin x = \cos \frac{\pi}{7}$ ....

Inéquations trigonométriques

Calcul 8.8

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

a) $\cos x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ....

b) $\cos x \leqslant \cos \frac{\pi}{3}$ ....

c) $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$ ....

d) $|\sin x| \leqslant \frac{1}{2}$ ....

e) $\tan x \geqslant 1$ ....

f) $|\tan x| \geqslant 1$ ....

g) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ ......

h) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ .....

Réponses mélangées

$$\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{11\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \qquad \left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},2\pi\right] \qquad \left[-\pi,-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$$

$$\left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right] \qquad 0 \qquad \left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right] \qquad \left\{\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$-\sin x \qquad \left[0,\frac{3\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{8},\frac{11\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{15\pi}{8},2\pi\right] \qquad \left[0,\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{4},2\pi\right] \qquad \left\{-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$-2\cos x \qquad \left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\qquad \left\{-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right\} \qquad \left[-\pi,-\frac{5\pi}{8}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{8},\pi\right]$$

$$\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right\} \qquad \left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right] \qquad \left\{\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\} \qquad \left\{-\frac{11\pi}{12},-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right\} \qquad 2\cos x \qquad \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\} \qquad \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \qquad \left\{\frac{5\pi}{14}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{9\pi}{14}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \qquad 0 \qquad \left\{-\frac{\pi}{7},\frac{\pi}{7}\right\}$$

$$\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right] \qquad \left\{\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\} \qquad \left\{\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12},\frac{13\pi}{12},\frac{23\pi}{12}\right\} \qquad 0 \qquad \left[-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$$

$$\left\{\frac{-2\pi}{3},\frac{-\pi}{3}\right\} \qquad \left[0,\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right] \qquad -1-\sqrt{3} \qquad \left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{6},2\pi\right]$$

$$\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\frac{7\pi}{4}\right\} \qquad \left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\} \qquad 4\cos^3 x-3\cos x \qquad \left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right\}$$

$$-\frac{1}{2} \qquad \left\{-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\} \qquad \tan x \qquad \left\{\frac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{11\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \qquad 0 \qquad \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad \left\{\frac{5\pi}{14},\frac{9\pi}{14}\right\} \qquad \frac{1}{\cos x}$$

$$\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \qquad 2 \qquad \left\{\frac{\pi}{7}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{7}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \left\{\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right\} \qquad -\sin x \qquad \left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\} \qquad \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right]$$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \left\{\frac{\pi}{7},\frac{13\pi}{7}\right\} \qquad \left\{\frac{5\pi}{14},\frac{9\pi}{14}\right\} \qquad \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[$$

$$8\cos^4 x-8\cos^2 x+1 \qquad \left\{\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\} \qquad \left\{\frac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\} \qquad \left[-\pi,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right] \qquad \left\{\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

▶ Réponses et corrigés page 77

Dérivation

Prérequis
Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 9.1 — Avec des produits.
Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6)\exp(2x)$. ....

d) $x \in \,]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x)\ln(x - 2)$ ....

Calcul 9.2 — Avec des puissances.
Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2\cos(x))^2$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3\cos(x) - \sin(x))^3$. ....

Calcul 9.3 — Avec des fonctions composées.
Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. ....

b) $x \in \,]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x)\exp(x^2 + x)$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3\sin(2x))$. ....

Calcul 9.4 — Avec des fonctions composées — *bis*.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)$. ....

c) $x \in]0,\pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$. ....

d) $x \in]0,+\infty[$ et $f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$. ....

Calcul 9.5 — Avec des quotients.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2\sin(x)+3}$. ....

b) $x \in]0,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x+2}$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\cos(2x+1)}{x^2+1}$. ....

d) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{\ln(x)}$. ....

Opérations et fonctions composées

Calcul 9.6

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. ....

b) $x \in]-3,3[$ et $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$. ....

c) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$ ....

d) $x \in]0,\pi[$ et $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$. ....

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 9.7

Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus 3, -2$ et $f(x) = \dfrac{1}{3-x} + \dfrac{1}{2+x}$. ....

b) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$ ....

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2+x-2) - \dfrac{x+2}{x-1}$. ....

d) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$. ....

e) $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$. ....

Réponses mélangées

$\dfrac{1}{1-x^2}$ $\quad \dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3) - (x^2+3x) \times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$ $\quad \dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$ $\quad \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

$\dfrac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2} \sin\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)$ $\quad \dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$ $\quad \dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$ $\quad \dfrac{1}{x\ln(x)}$

$\dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$ $\quad \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$ $\quad -3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x))$ $\quad 5x^4-6x^2+4x-15$

$\dfrac{(4x+3)\ln(x)-2x-3}{(\ln(x))^2}$ $\quad 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$ $\quad (6x-1)\ln(x-2) + \dfrac{3x^2-x}{x-2}$

$(2x^2-2x+10)\exp(2x)$ $\quad \dfrac{2}{x+1}\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad \dfrac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$

$\dfrac{x^2}{(x+1)^2}$ $\quad \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\quad (-2x^2+3x+1)\exp(x^2+x)$ $\quad \dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}$

$2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad -2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$ $\quad 4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)$

$6x^2+2x-11$ $\quad 8\cos^2(x)-6\cos(x)\sin(x)-4$ $\quad 5(x^2-5x)^4(2x-5)$ $\quad \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$

► Réponses et corrigés page 80

Fiche de calcul n° 10

Primitives

Prérequis
Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 10.1

Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{t+1}$ ....

b) $\dfrac{3}{(t+2)^2}$ ....

c) $\dfrac{3}{(t+2)^3}$ ....

d) $\sin(4t)$ ....

Calcul 10.2

Même exercice.

a) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$ ....

b) e^{2t+1} ....

c) $\dfrac{1}{1+9t^2}$ ....

Utilisation des formulaires

Calcul 10.3 — Dérivée d'une fonction composée.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\dfrac{2t^2}{1+t^3}$ ....

b) $t\sqrt{1+2t^2}$ ....

c) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

d) $\dfrac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$ ....

e) $\dfrac{t}{1+3t^2}$ ....

f) $\dfrac{12t}{(1+3t^2)^3}$ ....

Calcul 10.4 — Dérivée d'une fonction composée – *bis*.

Même exercice.

a) $\dfrac{\ln^3 t}{t}$ ....

b) $\dfrac{1}{t\sqrt{\ln t}}$ ....

c) $\dfrac{8e^{2t}}{(3-e^{2t})^3}$ ....

d) $\dfrac{1}{t^2\sqrt{t}}$ ....

e) $\dfrac{e^t+e^{-t}}{1-e^{-t}+e^t}$ ....

f) $\dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$ ....

Calcul 10.5 — Trigonométrie.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\cos^2 t \sin t$ ....

b) $\cos(t)\mathrm{e}^{\sin t}$ ....

c) $\tan t$ ....

d) $\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$ ....

e) $\dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ ....

f) $\dfrac{\cos(\pi \ln t)}{t}$ ....

g) $\tan^2 t$ ....

h) $\tan^3 t$ ....

i) $\dfrac{\tan^3 t}{\cos^2 t}$ ....

j) $\dfrac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}}$ ...

k) $\dfrac{1+\tan^2 t}{\tan^2 t}$ ....

l) $\dfrac{\cos t}{(1-\sin t)^3}$ ......

m) $\dfrac{1}{1+4t^2}$ ....

n) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}$ ....

Calcul 10.6 — Trigonométrie – *bis.*

Déterminer une primitive des expressions suivantes en utilisant d'abord le formulaire de trigonométrie.

a) $\cos^2 t$ ....

b) $\cos(t)\sin(3t)$ ....

c) $\sin^3 t$ ....

Calcul 10.7 — Fractions rationnelles.

Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

a) $\dfrac{t^2+t+1}{t^2}$ ....

b) $\dfrac{t^2+1}{t^3}$ ....

c) $\dfrac{t-1}{t+1}$ ....

d) $\dfrac{t-1}{t^2+1}$ ....

e) $\dfrac{t}{(t+1)^2}$ ....

Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

Calcul 10.8

Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

a) t^2-2t+5 .....

b) $\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}$ ....

c) $\sqrt{t}-\dfrac{1}{t^3}$ ....

d) $\dfrac{1}{t^4}+\dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ ......

e) $\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-3t}$ ......

f) e^{3t-2} ....

g) $\dfrac{t^2}{t^3-1}$ ....

h) $\dfrac{3t-1}{t^2+1}$ ....

i) $\sin(t)\cos^2(t)$ ...

j) $\dfrac{1}{t^2}\sin\dfrac{1}{t}$ ....

k) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{2+\mathrm{e}^t}$ ....

l) $\dfrac{\sin t}{2+3\cos t}$ ......

m) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

n) $t\mathrm{e}^{-t^2}$ ....

o) $\dfrac{1-\ln t}{t}$ ....

p) $\dfrac{1}{t\ln t}$ ....

q) $\dfrac{\sin(\ln t)}{t}$ .... $\boxed{}$

r) $\dfrac{e^t}{1+e^{2t}}$ .... $\boxed{}$

Calcul 10.9 — ***Bis repetita.***

Reprendre l'exercice précédent en commençant par intégrer puis en dérivant et factorisant.

Réponses mélangées

$\dfrac{1}{2}e^{2t+1}$ $\qquad t-2\ln|t+1|$ $\qquad \dfrac{2}{(3-e^{2t})^2}$ $\qquad \ln|t+1|$ $\qquad \dfrac{2\cos t+3}{(2+3\cos t)^2}$ puis $-\dfrac{1}{3}\ln|2+3\cos t|$

$\ln|t+1|+\dfrac{1}{t+1}$ $\qquad 2\sqrt{\tan t}$ $\qquad -\dfrac{1+\ln t}{t^2\ln^2 t}$ puis $\ln|\ln t|$ $\qquad \dfrac{1}{4}\ln^4 t$ $\qquad \dfrac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}$

$-\dfrac{1}{\tan t}$ $\qquad -e^{\frac{1}{t}}$ $\qquad \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-\sin t)^2}$ $\qquad \dfrac{1}{\pi}\sin(\pi\ln t)$ $\qquad -\dfrac{2t\sin\frac{1}{t}+\cos\frac{1}{t}}{t^4}$ puis $\cos\dfrac{1}{t}$

$-\dfrac{1}{(1+3t^2)^2}$ $\qquad 2e^{2t}-3e^{-3t}$ puis $\dfrac{1}{2}e^{2t}-\dfrac{1}{3}e^{-3t}$ $\qquad -\dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{2}{t}+1\right)$ puis $-\dfrac{1}{t}+\ln|t|$

$-\dfrac{e^t(e^{2t}-1)}{(1+e^{2t})^2})$ puis $\operatorname{Arctan}(e^t)$ $\qquad \dfrac{\cos\ln t-\sin\ln t}{t^2}$ puis $-\cos(\ln t))$ $\qquad \dfrac{1}{2\sqrt{t}}+\dfrac{3}{t^4}$ puis $\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2t^2}$

$-\dfrac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}$ $\qquad \dfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}$ $\qquad \ln t-\dfrac{1}{2t^2}$ $\qquad \dfrac{1}{2}\tan^2 t+\ln|\cos t|$ $\qquad \dfrac{1}{4}\tan^4 t$ $\qquad \ln|1-e^{-t}+e^t|$

$-\dfrac{3t^2-2t-3}{(t^2+1)^2}$ puis $\dfrac{3}{2}\ln(t^2+1)-\operatorname{Arctan}(t)$ $\qquad -\dfrac{\cos(4t)}{8}-\dfrac{\cos(2t)}{4}$ $\qquad \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}(2t)$

$\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sin(2t)}{4}$ $\qquad \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)-\operatorname{Arctan}(t)$ $\qquad -2\cos\sqrt{t}$ $\qquad \dfrac{\ln t-2}{t^2}$ puis $\ln t-\dfrac{1}{2}\ln^2 t$

$2\sqrt{\ln t}$ $\qquad 3e^{3t-2}$ puis $\dfrac{1}{3}e^{3t-2}$ $\qquad -\cos t+\dfrac{1}{3}\cos^3 t$ $\qquad -\ln|1-\sin t|$ $\qquad -\dfrac{\cos(4t)}{4}$

$\dfrac{2e^t}{(2+e^t)^2}$ puis $\ln(2+e^t)$ $\qquad \dfrac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}$ $\qquad (1-2t^2)e^{-t^2}$ puis $-\dfrac{1}{2}e^{-t^2}$

$-\ln|\cos t|$ $\qquad \dfrac{2}{3}\ln|1+t^3|$ $\qquad -\sqrt{1-t^2}$ $\qquad \cos t(3\cos^2 t-2)$ puis $-\dfrac{1}{3}\cos^3 t$

$\operatorname{Arctan}(e^t)$ $\qquad \dfrac{1}{3}\operatorname{Arctan}(3t)$ $\qquad \dfrac{1}{6}\ln(1+3t^2)$ $\qquad \dfrac{1}{(1-t^2)^{3/2}}$ puis $-\sqrt{1-t^2}$

$-\dfrac{t(t^3+2)}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}$ puis $\dfrac{1}{3}\ln(|t^3-1|)$ $\qquad -\dfrac{3}{2(t+2)^2}$ $\qquad -\dfrac{1}{3}\cos^3 t$ $\qquad \tan t-t$

$-\dfrac{4}{t^5}-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{t^{5/2}}$ puis $-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{t^3}-\dfrac{2}{\sqrt{t}}$ $\qquad -\dfrac{3}{t+2}$ $\qquad 2(t-1)$ puis $\dfrac{1}{3}t^3-t^2+5t$ $\qquad t+\ln t-\dfrac{1}{t}$ $\qquad e^{\sin t}$

▶ Réponses et corrigés page 83

Calcul d'intégrales

Prérequis
Primitives usuelles, composées simples.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon ordre ».

Calcul 11.1

Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\int_{-2}^{3} x^2 + \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ . . . . .

b) $\int_{5}^{-3} |\sin 7x| \,\mathrm{d}x$

c) $\int_{0}^{-1} \sin x \,\mathrm{d}x$ . . .

Calcul 11.2

En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\int_{1}^{3} 7 \,\mathrm{d}x$ . . . .

b) $\int_{7}^{-3} -5 \,\mathrm{d}x$ . . . . .

c) $\int_{0}^{7} 3x \,\mathrm{d}x$ . . . . . .

d) $\int_{2}^{8} 1-2x \,\mathrm{d}x$ . .

e) $\int_{-2}^{2} \sin x \,\mathrm{d}x$ . . . .

f) $\int_{-2}^{1} |x| \,\mathrm{d}x$ . . . . . .

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, que l'on note $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Calcul 11.3 — Polynômes.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^{3} 2 \,\mathrm{d}x$ . . . .

b) $\int_{1}^{3} 2x-5 \,\mathrm{d}x$ . . . .

c) $\int_{-2}^{0} x^2+x+1 \,\mathrm{d}x$ . . . .

d) $\int_{-1}^{1} 3x^5-5x^3 \,\mathrm{d}x$ . . . .

e) $\int_{0}^{1} x^5-x^4 \,\mathrm{d}x$ . . . .

f) $\int_{1}^{-1} x^{100} \,\mathrm{d}x$ . . . .

Calcul 11.4 — Fonctions usuelles.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x \,\mathrm{d}x$ . . .

b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \,\mathrm{d}x$ . . .

c) $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ . . . .

d) $\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ . . .

e) $\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ . . . . . .

f) $\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ . . . .

Calcul 11.5 — De la forme $f(ax+b)$.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x+1)^3\,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{4}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\pi x+2}$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}\sin(3x)\,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{33}\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\mathrm{d}x$ ....

Calcul 11.6 — Fonctions composées.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3}\frac{x-2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}x\sin(x^2+1)\,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\tan x\,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x(\cos x)^5\,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1}x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 11.7 — Divers.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{3}|x+1|\,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\max(1,\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{3x-2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 11.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.

a) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{2}10^x\,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x$ ....

Réponses mélangées

$\frac{1}{\pi}\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$ 1 $\frac{17}{2}$ 0 $\frac{8}{3}$ Positif 0 $\frac{99}{\ln 10}$ $\frac{1}{384}$ $2(\mathrm{e}^3-1)$

$\frac{5}{2}$ 0 $-\frac{1}{30}$ 6 -2 50 -54 $\frac{147}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0 $\frac{7}{48}$ $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{\mathrm{e}+1}$ 8 $\frac{2}{3}$ Négatif $3\mathrm{e}-4$ Positif $-\ln 3$ $\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-3}$ $\frac{\sqrt{2}}{6}$ e^2

14 $\frac{\pi}{4}$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $-\frac{2}{101}$ 18 $\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ 0 0 78 $\frac{2\pi}{9}$

► Réponses et corrigés page 86

Fiche de calcul n° 12

011A

Intégration par parties

Prérequis

Primitives, dérivées, intégration par parties.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégrales

Calcul 12.1

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{2} t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_1^{\ln 2} t2^t\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\,\mathrm{d}t$ ....

e) $\displaystyle\int_1^{2} t\ln t\,\mathrm{d}t$ ....

f) $\displaystyle\int_0^{1} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ ....

g) $\displaystyle\int_0^{1} t\arctan t\,\mathrm{d}t$ ....

h) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$ ....

i) $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ ....

j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t\,\mathrm{d}t$ ....

Primitives

Calcul 12.2

Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

a) $x \longmapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ ....

c) $x \longmapsto \arctan(x)$ ......

Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

Calcul 12.3 — Calcul d'intégrales.

a) $\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 12.4 — Calcul de primitives.

Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \ln^2 x$ ....

b) $x \longmapsto (x\ln x)^2$ ....

Réponses mélangées

$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x \end{cases}$ $\quad 2\ln 2 - \dfrac{3}{4} \quad \dfrac{\pi}{2} - 1 \quad \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi^2}{32} \quad \ln(2) - 2 + \dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1}{2} \quad -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{4}{3} \quad \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\left(\dfrac{1}{3}\ln^2 x - \dfrac{2}{9}\ln x + \dfrac{2}{27}\right) \end{cases} \quad \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$

$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x \end{cases} \quad \dfrac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \dfrac{8}{9}\sqrt{2} + \dfrac{4}{9} \quad \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{cases}$

$\dfrac{5}{2} - \mathrm{e}^2 \quad 1 \quad \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\dfrac{1+\ln x}{x} \end{cases} \quad 4 \quad \dfrac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2\ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}$

► Réponses et corrigés page 89

Changements de variable

Prérequis

Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.

Changements de variable

Calcul 13.1

Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ avec $t = \sin\theta$ ....

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin t$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin t$ ....

e) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

Calcul 13.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \cos t$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \mathrm{e}^t$ ....

c) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \dfrac{t}{2} - 1$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ avec $t = \tan u$ ....

e) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \dfrac{1}{t}$ ....

f) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t+t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \ln t$ ....

Changements de variable et intégrations par parties

Calcul 13.3

Effectuer le changement de variable indiqué, continuer avec une intégration par parties et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{t}}\,dt$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}}\,dt$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

Calculs de primitives par changement de variable

Calcul 13.4

Déterminer une primitive de f en utilisant le changement de variable donné.

a) $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto \dfrac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x}$ avec $u = \tan x$ ....

b) $x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{1 + \operatorname{th}(x)}$ avec $u = e^x$ ....

c) $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$ avec $u = \sqrt{e^x - 1}$ ....

d) $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$ avec $u = \sqrt[3]{x}$ ....

e) $x > 1 \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ avec $u = \sqrt{x^2 - 1}$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{\pi}{6}$ $\qquad \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{2} - \dfrac{e^{-2x}}{4} \end{cases}$ $\qquad 2e^2$ $\qquad \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2e+1}{3}\right)$ $\qquad \dfrac{\pi}{12}$ $\qquad \dfrac{\pi}{2}$

$\begin{cases} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan x + \ln\tan(x) \end{cases}$ $\qquad -2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1) - 4 + 2\sqrt{3}$

$\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ $\qquad \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) \end{cases}$ $\qquad \dfrac{1}{4}$ $\qquad 2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ $\qquad \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}$ $\qquad \dfrac{1}{12}$

$\dfrac{1}{4} + \dfrac{\pi}{8}$ $\qquad \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) \end{cases}$ $\qquad \begin{cases}]1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan\sqrt{x^2 - 1} \end{cases}$

▶ Réponses et corrigés page 91

Fiche de calcul n° 14 013A

Intégration des fractions rationnelles

Prérequis
Fonctions ln et arctan. Division euclidienne entre polynômes.
Petites décompositions en éléments simples.
Forme canonique d'un trinôme du second degré.
Changements de variable affines dans les intégrales.

Premier cas

Calcul 14.1

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 14.2

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a}\,\mathrm{d}t$ ....

Deuxième cas

Dans ce second cas, il s'agit de reconnaître une expression du type $\frac{u'}{u}$.

Calcul 14.3

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 14.4

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}t}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{t}{at^2+1}\,\mathrm{d}t$ ....

Troisième cas

Calcul 14.5 — Exemple détaillé d'un calcul d'intégrale.

a) Quels sont les deux zéros de $t \longmapsto t^2 - 3t + 2$? ....

b) Trouver deux réels A et B tels que

pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, on ait $\dfrac{1}{(t-1)(t-2)} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{B}{t-2}$ ....

c) Calculer $\displaystyle\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 14.6

Calculer les intégrales suivantes, en procédant comme ci-dessus.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+3}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2-1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 14.7

Soit $a \in \left]0, 1\right[$. Calculer $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{t^2-a}\,\mathrm{d}t$ ....

Quatrième cas

Calcul 14.8 — Une primitive à retenir.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Calculer la dérivée de $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$ ....

b) Donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$ ....

Calcul 14.9

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 14.10

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t$ ....

Réponses mélangées

1 et 2 $\qquad \ln\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right) \qquad \ln\dfrac{33}{28} \qquad \ln\left(\dfrac{7}{3}\right) \qquad 2\ln\dfrac{4}{3} \qquad \ln(a+1) \qquad \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{5}$

$\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}} \qquad \ln\dfrac{1}{3} \qquad \dfrac{a}{a^2+x^2} \qquad \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) \qquad 2\ln\dfrac{9}{10} \qquad \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right) \qquad 2\ln\dfrac{4}{3} \qquad \dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2} \qquad \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} \qquad A=-1$ et $B=1 \qquad \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) \qquad \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{5}{3}\right) \qquad \dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{a+1}{2}\right)$

▶ Réponses et corrigés page 94

Systèmes linéaires

Prérequis
Résolution par substitution d'une variable, par combinaisons linéaires de lignes.

Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Calcul 15.1

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$.

a) $\begin{cases} x - 2\,y \,=\, 1 \\ 3\,x + 4\,y \,=\, 13 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 2\,x + y \,=\, 16 \\ x - y \,=\, 5 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3\,x - 6y = -3 \\ 2\,x + 2\,y = 2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 3\,x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6\,x + 2\,y = 3\sqrt{2} \end{cases}$ ....

Calcul 15.2 — Systèmes avec paramètre.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases}$ ......

Systèmes de 2 équations à 3 inconnues

Calcul 15.3

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases}$ ....

Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

Calcul 15.4

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} a - b - c = -7 \\ 3a + 2b - c = 3 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases}$ ......

d) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$ ......

Calcul 15.5

On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a proposées.

a) $a = 0$ ....

b) $a = -2$ ....

c) $a = 3$ ....

d) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$. ....

Calcul 15.6

On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètres $(a, c) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x - az = c \\ a\,x - y = c \\ a\,y - z = c. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a et c proposées.

a) $a = 2$, $c = 7$ ....

b) $a = 1, c = 2$ ....

c) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ....

Calcul 15.7

On propose le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 4x + y + z = \lambda x \\ x + 4y + z = \lambda y \\ x + y + 4z = \lambda z. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de λ proposées.

a) $\lambda = 1$ ....

b) $\lambda = 3$ ....

c) $\lambda = 6$ ....

Réponses mélangées

$\{(1, 1/2, 1/2)\}$ $\quad$ $\varnothing$ $\quad$ $\left\{(-\frac{2}{7} - z, \frac{-3}{7}, z) \,;\, z \in \mathbb{R}\right\}$ $\quad$ $\{(2, -1, 3)\}$

$\left\{(\frac{a^2 + a - 1}{a^3 - 1}c, \frac{a^2 - a - 1}{a^3 - 1}c, \frac{-a^2 + a + 1}{a^3 - 1}c)\right\}$ $\quad$ $(2, -3)$ $\quad$ $\{(5, 3, -1)\}$ $\quad$ $\{(3, 1)\}$ $\quad$ $\{(7, 2)\}$

$\varnothing$ $\quad$ $\left\{(\frac{13}{6} - \frac{5}{3}z, -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}z, z); z \in \mathbb{R}\right\}$ $\quad$ $\varnothing$ $\quad$ $\left\{(x, \frac{-5}{12} - \frac{3}{2}x, \frac{-25}{24} - \frac{7}{4}x); x \in \mathbb{R}\right\}$

$\{(-1, 4, 2)\}$ $\quad$ $\left\{(1 - \frac{a}{4}, \frac{-1}{2} + \frac{3}{8}a)\right\}$ $\quad$ $\left\{(1, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2})\right\}$ $\quad$ $\{(x, y, -x - y) \,;\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$(a - 2a^2, a + a^2)$ $\quad$ $\{(5z, 1 - 4z, z) \;;\; z \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\{(1, y, 3 + 2y); y \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\{(1 + z, -z, z); z \in \mathbb{R}\}$

$\left\{(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$ $\quad$ $\left\{(\frac{1}{13}a + \frac{5}{13}a^2, \frac{2}{13}a - \frac{3}{13}a^2)\right\}$ $\quad$ $\{(x, x, x) \,;\, x \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\{(0, 0, 0)\}$ $\quad$ $\left\{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\right\}$

► Réponses et corrigés page 99

Nombres complexes

Prérequis
Forme algébrique et forme exponentielle.

Pour s'échauffer

Calcul 16.1 — Écriture algébrique.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $(2+6i)(5+i)$ ....

b) $(3-i)(4+i)$ ....

c) $(4-3i)^2$ ....

d) $(1-2i)(1+2i)$ ....

e) $(2-3i)^4$ ....

f) $\dfrac{1}{3-i}$ ....

g) $\dfrac{2-3i}{5+2i}$ ....

h) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ....

Calcul 16.2 — Forme exponentielle.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

a) 12 ....

b) -8 ....

c) $\sqrt{3}i$ ....

d) $-2i$ ....

e) $-2e^{i\frac{3\pi}{5}}$ ....

f) $5-5i$ ....

g) $-5+5i\sqrt{3}$ ....

h) $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{6}}$ ....

Un calcul plus dur

Calcul 16.3 — Une simplification.

On pose $z=\dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$.

a) Calculer $|z|$ ....

b) Mettre z sous forme algébrique ....

c) Calculer z^{2021} ....

Réponses mélangées

$5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $\quad -119+120i$ $\quad 4+32i$ $\quad \dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}i$ $\quad 13-i$ $\quad \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

5 $\quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad 8e^{i\pi}$ $\quad \dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}i$ $\quad 1$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad 7-24i$

12 $\quad 2e^{i\frac{8\pi}{5}}$ $\quad 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\quad \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad 10e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $\quad 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

► Réponses et corrigés page 104

Trigonométrie et nombres complexes

Prérequis
Nombres complexes, trigonométrie.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Linéarisations

Calcul 17.1

Linéariser :

a) $\cos^3(x)$ ....

b) $\cos(2x)\sin^2(x)$ ....

c) $\cos^2(2x)\sin^2(x)$ ...

d) $\cos(3x)\sin^3(2x)$ ...

e) $\cos^3(2x)\cos(3x)$ ..

f) $\sin^2(4x)\sin(3x)$ ...

Arc-moitié, arc-moyen

Calcul 17.2

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$) :

a) $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ ....

b) $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$ ....

c) $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} - 1$ ....

d) $1 + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ....

e) $-1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ ....

f) $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ ....

g) $\dfrac{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}}$ ....

h) $\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{27}$ ....

Calcul 17.3

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$) :

a) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ ....

b) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ ....

Calculs d'intégrales

Calcul 17.4

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x$ ....

Réponses mélangées

$\frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 2)$ $\quad\left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$ $\quad\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$

$-\frac{\sin(9x)}{8} + \frac{3\sin(5x)}{8} - \frac{\sin(3x)}{8} - \frac{3\sin(x)}{8}$ $\quad-\frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}$

$\frac{\cos(9x)}{8} + \frac{3\cos(5x)}{8} + \frac{\cos(3x)}{8} + \frac{3\cos(x)}{8}$ $\quad 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

$2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}$ $\quad 2^{27}\cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\quad 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$ $\quad\frac{\mathrm{e}^{\pi} + 1}{2}$

$-\frac{1}{8}\cos(6x) + \frac{1}{4}\cos(4x) - \frac{3}{8}\cos(2x) + \frac{1}{4}$ $\quad 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{-7\mathrm{i}\pi}{12}}$ $\quad 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$

$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}\mathrm{e}^{\frac{13\mathrm{i}\pi}{24}}$ $\quad 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ $\quad -\frac{1}{4}\sin(11x) + \frac{1}{4}\sin(5x) + \frac{1}{2}\sin(3x)$ $\quad 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}}$

► Réponses et corrigés page 106

Sommes et produits

Prérequis
Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.
Fonctions usuelles (racine carrée, logarithme népérien).

Rappel

Si q est un nombre réel, si $m, n \in \mathbb{N}^*$ et si $m \leqslant n$, on a

- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Calculs de sommes simples

Calcul 18.1

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k+n-1)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3}\right)$ ....

Calcul 18.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(4k(k^2+2)\big)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k}$ ....

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (7^k + 4k - n + 2)$ ....

f) $\displaystyle\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$ ....

Calcul 18.3 — Produits.

Calculer les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tels que $p \geqslant q$.

a) $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} 2$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k} \times k$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=-10}^{10} k$ ....

Avec des changements d'indice

Calcul 18.4

Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)$ avec $j=n+1-k$. ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)$ avec $j=n+1-k$. ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^{k}$ avec $j=k-1$. ....

d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2}(k-2)^{3}$ avec $j=k-2$. ....

Sommes et produits télescopiques

Calcul 18.5 — Sommes télescopiques.

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2}\left((k+1)^{3}-k^{3}\right)$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\times k!$ ....

Calcul 18.6 — Produits télescopiques.

Calculer les produits suivants.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-3}$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^{2}}\right)$ ....

À l'aide d'une décomposition en éléments simples

Calcul 18.7

En déterminant d'abord a et b réels tels que $\dfrac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\dfrac{a}{x-\alpha}+\dfrac{b}{x-\beta}$, calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+3)}$ ....

Sommes doubles

Calcul 18.8

Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j$ ....

b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)^2$ ....

e) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \ln(i^j)$ ....

f) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$ ....

Réponses mélangées

$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ $\quad$ $\frac{n^2(n+1)}{2}$ $\quad$ $\frac{n(n^2-1)}{2}$ $\quad$ $\frac{(n-2)(n-7)}{6}$ $\quad$ $(n+2)^3-2^3$

$(n+1)!-1$ $\quad$ 0 $\quad$ $n(n+2)$ $\quad$ $n+1$ $\quad$ 2^{q-p+1} $\quad$ $\frac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}$ $\quad$ 0

$1-4n^2$ $\quad$ $\frac{9}{2}(3^{n-2}-1)$ $\quad$ $\ln(n+1)$ $\quad$ $n(n+1)(n^2+n+4)$ $\quad$ $5^{n+1}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}$

$\frac{7}{6}(7^n-1)+n(n+4)$ $\quad$ $\frac{n(n+3)}{4}$ $\quad$ $\frac{n+1}{2n}$ $\quad$ $\frac{n+1}{2n}$ $\quad$ $\frac{n(n+1)}{2}\ln(n!)$ $\quad$ $\frac{n(n+1)}{2}$

$\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$ $\quad$ $n2^{n+1}+2(1-2^n)$ $\quad$ $5^n(n!)^{\frac{3}{2}}$ $\quad$ $\frac{n(5n+1)}{2}$ $\quad$ $3^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$\frac{1}{n}$ $\quad$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{n+3}$ $\quad$ $1-\frac{1}{(n+1)!}$ $\quad$ $\frac{7(n+1)(n+4)}{2}$ $\quad$ $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\quad$ $1-\frac{1}{n+1}$

► Réponses et corrigés page 108

Coefficients binomiaux

Prérequis
Factorielle. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et de coefficients binomiaux

Calcul 19.1 — Pour s'échauffer.

Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\dfrac{101!}{99!}$ ....

b) $\dfrac{10!}{7!}$ ....

c) $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!}$ ....

d) $\dbinom{6}{2}$ ....

e) $\dbinom{8}{3}$ ....

f) $4 \times \dbinom{7}{4}$ ....

Calcul 19.2 — Pour s'échauffer – *bis*.

Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, de coefficients binomiaux et, le cas échéant, à l'aide de puissances.

a) $6 \times 7 \times 8 \times 9$ ....

b) $\dfrac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$ ....

c) $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ ......

d) $3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$ ...

Calcul 19.3 — Avec des paramètres.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k < n$.

a) $\dbinom{n}{2}$ (pour $n \geqslant 2$) ....

b) $\dbinom{n}{3}$ (pour $n \geqslant 3$) ....

c) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$ ....

d) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ ....

e) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!}$ ....

f) $\dfrac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \dfrac{n!}{2^{2n}}$ ....

Calcul 19.4 — Avec des paramètres – *bis*.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre a désigne un nombre non nul.

a) $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{2n \times (n+1)!} + \dfrac{1}{2 \times (n+2)!}$ ....

b) $\dfrac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \dfrac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3}$ ....

Autour du binôme de Newton

Calcul 19.5

Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Calcul 19.6

a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton $(1+1)^n + (1-1)^n$ ....

b) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$ ....

Calcul 19.7

En utilisant la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ ....

Réponses mélangées

6^n $\quad \dfrac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}$ $\quad 140$ $\quad \dfrac{1}{30}$ $\quad 15$ $\quad \dbinom{9}{4}$ $\quad 2 \times \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$

$(n+2)(n+1)$ $\quad 3^n$ $\quad 56$ $\quad 0$ $\quad n2^{n-1}$ $\quad 10\ 100$ $\quad \dfrac{n(n-1)}{2}$ $\quad \dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}$

2^n $\quad \dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$ $\quad \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$ $\quad 2^{n-1}$ $\quad 720$ $\quad \dfrac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}$ $\quad 2^n \times n!$

$\dfrac{k+1}{n-k}$ $\quad \dfrac{1}{(n+1)!}$ $\quad 12 \times 15^n$ $\quad \dfrac{9!}{5!}$ $\quad \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ $\quad n(n+1)2^{n-2}$

► Réponses et corrigés page 113

Manipulation des fonctions usuelles

Prérequis
Dérivation, équations du second degré.

Calculs de valeurs

Calcul 20.1 — Fonctions circulaires réciproques.

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ....

b) $\arctan(1)$ ....

Résolution d'équations

Calcul 20.2 — Fonctions $x \longmapsto a^x$.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $3^x = \frac{9^x}{2}$ ....

b) $4^x = 2 \times 2^x$ ....

c) $2^x = 3 \times 4^x$ ....

d) $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$ ...

Calcul 20.3 — Fonctions $x \longmapsto a^x$ (plus difficile).

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

a) $2^x + 4^x = 4$ ....

b) $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$ ....

c) $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$ ....

d) $3^x + 3^{2x} - 1 = 0.$ ....

Dérivation

Calcul 20.4 — Quelques calculs de dérivées.

Dériver les fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto 2^x + x^2$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{3^x}{5^x+1}$ ....

c) $x \longmapsto x^x$ ....

Calcul 20.5 — Une dérivée importante.

a) $x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{\pi}{4}$ $\quad -\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$ $\quad x \mapsto (\ln(x)+1)x^x$ $\quad x \mapsto 0$ $\quad x \mapsto \dfrac{15^x \ln(3/5) + 3^x \ln(3)}{(5^x+1)^2}$ $\quad 1$ $\quad 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$

$\dfrac{\ln(4)}{\ln(20/3)}$ $\quad \dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$ $\quad x \mapsto \ln(2)\times 2^x + 2x$ $\quad \dfrac{\pi}{6}$ $\quad \left\{0; \dfrac{1}{2}\right\}$ $\quad \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ $\quad \dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}$

▶ Réponses et corrigés page 117

Suites numériques

Prérequis
Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

Calcul de termes

Calcul 21.1 — Suite explicite.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$. Calculer :

a) u_0 ....

b) u_1 ....

c) u_{n+1} ....

d) u_{3n} ....

Calcul 21.2 — Suite récurrente.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$. Calculer :

a) son troisième terme ....

b) u_3 ....

Calcul 21.3 — Suite récurrente.

On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \geqslant 1,\ v_{n+1} = \sqrt{v_n}$. Calculer :

a) v_3 ....

b) son sixième terme ....

Calcul 21.4 — Suite récurrente.

On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n^2$. Calculer :

a) w_2 ....

b) son centième terme ....

Calcul 21.5 — Suite explicite.

Soit la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \ln\left(\dfrac{n^n}{2^n}\right)$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

a) t_{2n} ....

b) t_{4n} ....

Suites arithmétiques et géométriques

Calcul 21.6 — Suite arithmétique.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Calculer :

a) a_{10} ....

b) $s_{100} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{99}$ ....

c) $a_{1\,000}$ ....

d) $s_{101} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{100}$ ....

Calcul 21.7 — Suite arithmétique.

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r vérifiant que $b_{101} = \dfrac{2}{3}$ et $b_{103} = \dfrac{3}{4}$. Calculer :

a) b_{102} ....

b) r ....

Calcul 21.8 — Suite géométrique.

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Calculer :

a) Son dixième terme est : ....

b) $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \ldots + g_9$ ....

c) g_{10} ....

d) $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \ldots + g_{10}$ ....

Calcul 21.9 — Suite géométrique.

La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q > 0$ vérifiant que $h_{11} = \dfrac{5\pi}{11}$ et $h_{13} = \dfrac{11\pi}{25}$. Calculer :

a) h_{12} ....

b) q ....

Suites récurrentes sur deux rangs

Calcul 21.10

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$. Calculer :

a) u_n ....

b) u_5 ....

Calcul 21.11

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 0$, $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$. Calculer :

a) v_n ....

b) v_2 ....

Calcul 21.12 — Suite de Fermat.

Soit la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = 2^{2^n} + 1$. Calculer :

a) F_3 ....

b) F_4 ....

c) $(F_{n-1} - 1)^2 + 1$ ....

d) $F_n \times (F_n - 2)$ ....

e) F_n^2 ....

f) $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2$ ....

Réponses mélangées

F_n $\quad 2^{\frac{1}{8}}$ $\quad \dfrac{3}{512}$ $\quad 3^n + (-2)^n$ $\quad 2$ $\quad \dfrac{11\sqrt{5}}{25}$ $\quad \dfrac{6141}{1024}$ $\quad F_{n+1} + 2^{2^n+1}$ $\quad 4n\ln(2n)$

211 $\quad 29$ $\quad 2^{\frac{1}{64}}$ $\quad \dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}$ $\quad 2\sqrt{2}$ $\quad \dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}$ $\quad F_{n+1} - 2$

2 $\quad 65\,537$ $\quad \dfrac{12}{5}$ $\quad \dfrac{3069}{512}$ $\quad \dfrac{3}{1\,024}$ $\quad 21$ $\quad 10\,201$ $\quad \dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}$ $\quad 2\,001$ $\quad \dfrac{1}{24}$

$10\,000$ $\quad 2n\ln(n)$ $\quad \dfrac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2}$ $\quad F_{n+2}$ $\quad \dfrac{17}{24}$ $\quad 257$ $\quad 13$ $\quad 8$

► Réponses et corrigés page 119

Développements limités

Prérequis
Il est nécessaire de connaître les développements (en 0) des fonctions usuelles, ainsi que la formule de Taylor-Young.

Avertissement : Si vous trouvez les ordres demandés trop élevés, contentez-vous de faire les DL aux ordres 2 ou 3 dans un premier temps.

Développements limités

Calcul 22.1 — Développements limités d'une somme ou d'un produit de fonctions.

Former le développement limité, à l'ordre indiqué et au voisinage de 0, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 4 : $\sin(x) + 2\ln(1+x)$ ....

b) À l'ordre 4 : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ ....

c) À l'ordre 6 : $\mathrm{e}^x \sin(x)$ ....

Calcul 22.2 — Développements limités d'une fonction composée.

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 4, en 0 : $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ....

b) À l'ordre 6, en 0 : $\sqrt{\cos(x)}$ ....

c) À l'ordre 2, en 1 : $\dfrac{\ln(2-x)}{x^2}$ ....

Calcul 22.3 — Développements limités d'une fonction composée.

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 2, en $\dfrac{\pi}{3}$: $\sin(\pi\cos(x))$ ....

b) À l'ordre 3, en $\dfrac{\pi}{4}$: $\tan(x)$ ....

Réponses mélangées

$$3x-x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{2}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4) \qquad 1-\frac{3\pi^2}{8}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\mathrm{o}}\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2\right)$$

$$x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}-\frac{x^6}{90}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6) \qquad \mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}x}{2}+\frac{11\mathrm{e}x^2}{24}-\frac{7\mathrm{e}x^3}{16}+\frac{2447\mathrm{e}x^4}{5760}+\underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)$$

$$1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\mathrm{O}}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\right) \qquad 1-x+\frac{3}{2}(x-1)^2+\underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\left((x-1)^2\right)$$

$$1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{96}x^4-\frac{19}{5760}x^6+\underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^7) \qquad x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\frac{25}{12}x^4+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$$

► Réponses et corrigés page 122

Calcul matriciel

Prérequis
Calculs algébriques (sommes), coefficients binomiaux.

Calcul matriciel

Calcul 23.1 — Calculs de produits matriciels.

Dans cet exercice, on note A, B, C, D, E les cinq matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits matriciels suivants.

a) A^2 . . .

b) A^3 . . .

c) $B \times E$

d) $E \times B$

e) $A \times E$

f) $B \times A$

g) D^2 . . .

h) $D \times C$

i) $B^\top \times B$

Calcul 23.2 — Calcul de puissances.

On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice D étant de taille $n \times n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), et où $\theta \in \mathbb{R}$.

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance k-ième, pour $k \in \mathbb{N}$.

a) A^2 ...

b) A^3 ...

c) A^k ...

d) B^2 ...

e) B^3 ...

f) B^k ...

g) C^2 ...

h) C^3 ...

i) C^k ...

j) D^2 ...

k) D^3 ...

l) D^k ...

Inversion de matrices

Calcul 23.3 — Détermination d'inversibilité, calcul d'inverses.

Dans cet exercice, on note les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elle existe, l'inverse de chacune des matrices. Si elle n'est pas inversible, indiquer dans la case « non inversible » .

a) A . . .

b) B . . .

c) C . . .

d) D . . .

e) E . . .

f) F . . .

g) G . . .

h) H . .

i) J . . .

Calcul 23.4 — Matrices dépendant d'un paramètre.

Soit λ un paramètre réel. On note A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice, donner une condition nécessaire et suffisante (abrégée ci-dessous en CNS) sur λ pour que la matrice soit inversible et en donner, dans ce cas, l'inverse.

a) CNS pour A inversible . .

b) Inverse de A . . .

c) CNS pour B inversible . .

d) Inverse de B . . .

Réponses mélangées

$$\begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix} \qquad \text{Non inversible !} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2(\pi - e)}\begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1-2\mathrm{i} \\ 1 & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} n^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & (n^2) & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \lambda \neq 1 \qquad \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} \qquad n^{k-1}D \qquad \frac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \lambda \neq 1 \qquad 17 \text{ (matrice } 1 \times 1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 15 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix}$$

► Réponses et corrigés page 125

Algèbre linéaire

Prérequis
Coordonnées. Applications linéaires. Matrices. Rang.

Vecteurs

Calcul 24.1

Pour chacun des calculs suivants, déterminer les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

a) $u = (1,1)$, $\mathcal{B} = \big((0,1), (-1,2)\big)$.

b) $u = (1,1)$, $\mathcal{B} = \big((-1,2), (0,1)\big)$.

c) $u = (3,4)$, $\mathcal{B} = \big((1,2), (12,13)\big)$.

d) $u = (1,2,1)$, $\mathcal{B} = \big((0,1,3), (4,5,6), (-1,0,1)\big)$.

e) $u = (-1,0,1)$, $\mathcal{B} = \big((1,0,1), (1,1,1), (-1,-1,3)\big)$.

Calculs de rangs

Calcul 24.2 — Sans calcul.

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

f) $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Calcul 24.3

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ....

Matrices et applications linéaires

Calcul 24.4 — Matrices d'endomorphismes.

Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$ suivantes, déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

a) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 0), (0, 1)\big)$. ....

b) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1), (1, 0)\big)$. ....

c) $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 2), (3, 4)\big)$ ....

d) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, 3x - z, y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\big)$ ....

Calcul 24.5 — Matrices d'applications linéaires.

Pour l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ suivantes, déterminer la matrice de f de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

a) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1)\big)$, $\mathcal{B}' = \big((0, 1), (1, 0)\big)$.

Réponses mélangées

$1 \qquad (3, -1) \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix} \qquad 1 \qquad 2 \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad 2 \qquad 2 \qquad (-1, 1/2, 1/2) \qquad (-2, 4/5, 11/5) \qquad 4 \qquad 3$

$2 \qquad \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (9/11, 2/11) \qquad (-1, 3) \qquad 2 \qquad 1$

► Réponses et corrigés page 128

Équations différentielles

Prérequis
Équations différentielles.

Équations d'ordre 1 à coefficients constants

Calcul 25.1

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y' = 12y$ et $y(0) = 56$ ....

b) $y' = y + 1$ et $y(0) = 5$ ....

c) $y' = 3y + 5$ et $y(0) = 1$ ....

d) $y' = 2y + 12$ et $y(0) = 3$ ....

Calcul 25.2

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $5y' = -y$ et $y(1) = \mathrm{e}$ ....

b) $7y' + 2y = 2$ et $y(7) = -1$ ....

c) $y' - \sqrt{5}y = 6$ et $y(0) = \pi$ ....

d) $y' = \pi y + 2\mathrm{e}$ et $y(\pi) = 12$ ....

Équations d'ordre 2, homogènes, à coefficients constants

Calcul 25.3 — Une équation avec conditions initiales.

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

b) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

c) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$ ....

Calcul 25.4 — Racines doubles, racines simples.

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' - y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

b) $y'' + 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$ ....

c) $y'' + y' - 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

d) $y'' - 2y' + y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$ ....

e) $y'' + 4y' + 4y = 0$ et $y(1) = 1$ et $y'(1) = -3$ ....

Calcul 25.5 — Racines complexes.

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

b) $y'' + y' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$ ....

c) $y'' + 2y' + 2y = 0$ et $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ ....

Réponses mélangées

$x \mapsto 1 - 2\mathrm{e}^{-2x/7+2}$ $\quad x \mapsto (2-x)\mathrm{e}^{x}$ $\quad x \mapsto 9\mathrm{e}^{2x} - 6$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$

$x \mapsto (2-x)\mathrm{e}^{2-2x}$ $\quad x \mapsto 7\mathrm{e}^{-x} - 5\mathrm{e}^{-2x}$ $\quad x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$

$x \mapsto 56\mathrm{e}^{12x}$ $\quad x \mapsto \left(12 + \dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}\right)\mathrm{e}^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}$ $\quad x \mapsto 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}$

$x \mapsto \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x}$ $\quad x \mapsto 6\mathrm{e}^{x} - 1$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ $\quad x \mapsto \dfrac{8\mathrm{e}^{3x} - 5}{3}$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{(6-x)/5}$

$x \mapsto \cos x + 2\sin x$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$

▶ Réponses et corrigés page 131

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Fractions

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

1.1 b) .... $\boxed{2^5}$

1.1 c) .... $\boxed{3}$

1.1 d) .... $\boxed{-2\times 3^{3k-2}}$

1.2 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

1.2 b) .... $\boxed{\dfrac{7}{15}}$

1.2 c) .... $\boxed{9}$

1.2 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{9}}$

1.3 a) .... $\boxed{247}$

1.3 b) .... $\boxed{\dfrac{203}{24}}$

1.3 c) .... $\boxed{\dfrac{-10}{3}}$

1.3 d) .... $\boxed{1\ 000}$

1.4 .... $\boxed{\dfrac{16}{35}}$

1.5 a) .... $\boxed{2\ 022}$

1.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

1.5 c) .... $\boxed{1}$

1.5 d) .... $\boxed{2}$

1.6 a) .... $\boxed{\dfrac{-1}{n(n+1)^2}}$

1.6 b) .... $\boxed{-\dfrac{ab}{a-b}}$

1.6 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}n}$

1.7 .... $\boxed{\dfrac{n^3+n}{n+1}}$

1.8 a) .... $\boxed{4+\dfrac{5}{6}}$

1.8 b) .... $\boxed{1+\dfrac{1}{k-1}}$

1.8 c) .... $\boxed{3+\dfrac{5}{x-2}}$

1.9 .... $\boxed{2t}$

1.10 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{5}>\dfrac{5}{9}}$

1.10 b) .... $\boxed{\dfrac{12}{11}>\dfrac{10}{12}}$

1.10 c) .... $\boxed{\dfrac{125}{25}=\dfrac{105}{21}}$

1.11 .... $\boxed{\text{Non}}$

1.12 .... $\boxed{A>B}$

Corrigés

1.1 a) $\dfrac{32}{40}=\dfrac{8\times 4}{8\times 5}=\dfrac{4}{5}$

1.1 b) $8^3\times\dfrac{1}{4^2}=(2\times 4)^3\times\dfrac{1}{4^2}=2^3\times 4^3\times\dfrac{1}{4^2}=2^3\times 4=2^5$

1.1 c) $\dfrac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4}=\dfrac{(3^3)^{-1}\times(2^2)^2}{3^{-4}\times 2^4}=\dfrac{3^4}{3^3}=3$

1.1 d) On a : $\dfrac{(-2)^{2k+1}\times 3^{2k-1}}{4^k\times 3^{-k+1}}=\dfrac{(-2)\times(-2)^{2k}\times 3^{2k}\times 3^{-1}}{4^k\times 3^{-k}\times 3}=\dfrac{(-2)\times 4^k\times 3^{2k}\times 3^k}{4^k\times 3^2}=-2\times 3^{3k-2}$.

1.2 a) On met au même dénominateur : $\dfrac{2}{4}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\times 3}{4\times 3}-\dfrac{1\times 4}{3\times 4}=\dfrac{6}{12}-\dfrac{4}{12}=\dfrac{6-4}{12}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$.

1.2 b) On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3}-0{,}2=\frac{2}{3}-\frac{2}{10}=\frac{2\times 10}{3\times 10}-\frac{2\times 3}{10\times 3}=\frac{20}{30}-\frac{6}{30}=\frac{20-6}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7\times 2}{15\times 2}=\frac{7}{15}.$$

1.2 c) Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times 5=\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times\frac{5}{1}=\frac{36\times 15\times 5}{25\times 12\times 1}=\frac{12\times 3\times 5\times 3\times 5}{5\times 5\times 12\times 1}=\frac{3\times 3}{1}=\frac{9}{1}=9.$$

1.2 d) Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par la fraction inverse de la deuxième fraction :

$$-\frac{2}{15}\div\left(-\frac{6}{5}\right)=-\frac{2}{15}\times\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{2}{15}\times\frac{5}{6}=\frac{2\times 5}{15\times 6}=\frac{2\times 5}{3\times 5\times 2\times 3}=\frac{1}{9}.$$

1.3 a) On développe :

$$(2\times3\times5\times7)\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\Big)=\frac{2\times3\times5\times7}{2}+\frac{2\times3\times5\times7}{3}+\frac{2\times3\times5\times7}{5}+\frac{2\times3\times5\times7}{7}$$
$$=3\times5\times7+2\times5\times7+2\times3\times7+2\times3\times5=105+70+42+30=247.$$

1.3 b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{62}{10}\right)\times\frac{21}{24}=\left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{31}{5}\right)\times\frac{7}{8}$$
$$=\left(\frac{136}{15}+\frac{3}{5}\right)\times\frac{7}{8}=\left(\frac{136}{15}+\frac{9}{15}\right)\times\frac{7}{8}=\frac{145}{15}\times\frac{7}{8}=\frac{29}{3}\times\frac{7}{8}=\frac{203}{24}.$$

1.3 c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10}\times7^3-25^5\times49^2}{(125\times7)^3+5^9\times14^3}=\frac{5^{10}\times7^3-5^{10}\times7^4}{5^9\times7^3+5^9\times7^3\times2^3}=\frac{5^{10}\times7^3(1-7)}{5^9\times7^3(1+2^3)}=\frac{5\times(-6)}{9}=\frac{-10}{3}.$$

1.3 d) On calcule :

$$\frac{1\,978\times1\,979+1\,980\times21+1\,958}{1\,980\times1\,979-1\,978\times1\,979}=\frac{1\,978\times1\,979+1\,979\times21+21+1\,958}{1\,979\times(1\,980-1\,978)}$$
$$=\frac{1\,979\times(1\,978+21)+1\,979}{1\,979\times2}=\frac{1\,979\times(1\,978+21+1)}{1\,979\times2}=\frac{1\,979\times2\,000}{1\,979\times2}$$
$$=1\,000.$$

1.4 On calcule :

$$\frac{0{,}5-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{0{,}5-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-0{,}2}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-3{,}5}=\frac{\frac{3}{6}-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-\frac{7}{2}}$$
$$=\frac{3\big(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\big)}{5\big(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\big)}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{-7\big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\big)}=\frac{3}{5}-\frac{1}{7}=\frac{16}{35}.$$

1.5 a) On connaît l'identité remarquable : $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Donc : $\dfrac{2\,022}{(-2\,022)^2+(-2\,021)(2\,023)}=\dfrac{2\,022}{(2\,022)^2+(1-2\,022)\times(1+2\,022)}=\dfrac{2\,022}{(2\,022)^2+1-2\,022^2}=2\,022.$

1.5 b) On fait apparaître 2 021 dans 2 020 et 2 022 au dénominateur :

$$\frac{2\,021^2}{2\,020^2+2\,022^2-2}=\frac{2\,021^2}{(2\,021-1)^2+(2\,021+1)^2-2}$$
$$=\frac{2\,021^2}{2\,021^2-2\times2\,021\times1+1+2\,021^2+2\times2\,021\times1+1-2}$$
$$=\frac{2\,021^2}{2\,021^2-2\times2\,021\times1+2\,021^2+2\times2\,021\times1}=\frac{2\,021}{2\,021-2+2\,021+2}=\frac{1}{2}.$$

1.5 c) En posant $a=1\,234$, on a : $1\,235=a+1$ et $2\,469=2a+1$.

Donc : $\dfrac{1\,235\times2\,469-1\,234}{1\,234\times2\,469+1\,235}=\dfrac{(a+1)(2a+1)-a}{a(2a+1)+a+1}=\dfrac{2a^2+2a+1}{2a^2+2a+1}=1.$

1.5 d) En posant $a=1\,000$, on a : $999=a-1$, $1\,001=a+1$, $1\,002=a+2$ et $4\,002=2a+2$.

Donc : $\dfrac{4\,002}{1\,000\times1\,002-999\times1\,001}=\dfrac{4a+2}{a(a+2)-(a-1)(a+1)}=\dfrac{2(2a+1)}{a^2+2a-(a^2-1)}=\dfrac{2(2a+1)}{2a+1}=2.$

1.6 a) On met au même dénominateur. Cela donne :

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n}{n(n+1)^2}+\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}=\frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2}$$
$$=\frac{n+n^2+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2}=\frac{-1}{n(n+1)^2}.$$

....

1.6 b) On rappelle la formule : $a^3-b^3=(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)$. Cela donne :

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{ab+a^2+b^2}{a-b}-\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}=-\frac{ab}{a-b}.$$

....

1.6 c) Pour $n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1,2\}$, on a :

$$\frac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}=\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}\times\frac{n^2(n-1)^2}{2n+2}=\frac{6(n+1)}{2(n-1)}\times\frac{n(n-1)}{2(n+1)}=\frac{3}{2}n.$$

....

1.7 De $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, on a : $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2}k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k}=\dfrac{\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}\dfrac{2}{n(n+1)}=\dfrac{n(n^2+1)}{n+1}=\dfrac{n^3+n}{n+1}.$

....

1.8 a) On trouve $\dfrac{29}{6}=\dfrac{4\times 6+5}{6}=4+\dfrac{5}{6}.$

....

1.8 b) On trouve $\dfrac{k}{k-1}=\dfrac{k-1+1}{k-1}=1+\dfrac{1}{k-1}.$

....

1.8 c) On trouve $\dfrac{3x-1}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+5}{x-2}=3+\dfrac{5}{x-2}.$

....

1.9 Pour $t\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on a :

$$A=\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t)^2}=\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2}-\frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{1+2t+t^2-\big(1+t^2\big)}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}.$$

Donc, $AB=\left(\dfrac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}\right)\times\big(1+t^2\big)(1+t)^2=2t.$

....

1.10 a) $\dfrac{3}{5}=\dfrac{27}{45}>\dfrac{5}{9}=\dfrac{25}{45}$

....

1.10 c) $\dfrac{125}{25}=5=\dfrac{105}{21}$

....

1.11 Nous allons étudier les produits en croix.

On sait que $A=B$, si et seulement si $33\,215\times 208\,341=66\,317\times 104\,348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impairs, il est impair. Par contre, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée. A et B ne sont pas égaux.

....

1.12 On ré-écrit $A=\dfrac{10^5+1}{10^6+1}$ et $B=\dfrac{10^6+1}{10^7+1}$. Nous allons étudier les produits en croix.

D'une part calculons : $(10^5+1)\times(10^7+1)=10^{12}+10^7+10^5+1$.

D'autre part : $(10^6+1)^2=10^{12}+2\times 10^6+1$.

Comme $(10^5+1)\times(10^7+1)>(10^6+1)\times$ (10^6+1), on obtient : $A>B$.

....

Fiche n° 2. Puissances

Réponses

2.1 a) .... $\boxed{10^8}$

2.1 b) .... $\boxed{10^{15}}$

2.1 c) .... $\boxed{10^2}$

2.1 d) .... $\boxed{10^{-2}}$

2.1 e) .... $\boxed{10^4}$

2.1 f) .... $\boxed{10^{-8}}$

2.2 a) .... $\boxed{15^4}$

2.2 b) .... $\boxed{5^{-6}}$

2.2 c) .... $\boxed{2^7}$

2.2 d) .... $\boxed{(-7)^{-2}}$

2.2 e) .... $\boxed{3^5}$

2.2 f) .... $\boxed{3^{28}}$

2.3 a) .... $\boxed{2^{-4}\cdot 3^{-1}}$

2.3 b) .... $\boxed{2^{21}\cdot 3}$

2.3 c) .... $\boxed{2}$

2.3 d) .... $\boxed{2^{38}\cdot 3^{26}}$

2.4 a) .... $\boxed{8}$

2.4 b) .... $\boxed{11}$

2.4 c) .... $\boxed{3^{10}}$

2.4 d) .... $\boxed{2^6\cdot 5}$

2.5 a) .... $\boxed{\dfrac{x}{x+1}}$

2.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{x-2}}$

2.5 c) .... $\boxed{\dfrac{2x}{x+1}}$

2.5 d) .... $\boxed{\dfrac{2}{x-2}}$

Corrigés

2.3 a) $\dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 6^{-1}}=\dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 2^{-1}\cdot 3^{-1}}=\dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^{4-1}\cdot 2^{8-1}}=\dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^3\cdot 2^7}=2^{3-7}\cdot 3^{2-3}=2^{-4}\cdot 3^{-1}.$

2.3 b) On factorise : $2^{21}+2^{22}=2^{21}+2^{21}\cdot 2=2^{21}\cdot(1+2)=2^{21}\cdot 3.$

2.3 c) On factorise au numérateur et au dénominateur : $\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}}=\dfrac{(3+1)\cdot 3^{21}}{(3-1)\cdot 3^{21}}=\dfrac{4}{2}=2.$

2.3 d) On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n=a^n$ lorsque n est pair : $\dfrac{\left(3^2\cdot(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5\cdot 2^3\right)^{-2}}=\dfrac{3^{16}\cdot 2^{32}}{3^{-10}\cdot 2^{-6}}=2^{38}\cdot 3^{26}.$

2.4 a) On fait apparaître les facteurs premiers 2 et 3 : $\dfrac{8^{17}\cdot 6^{-6}}{9^{-3}\cdot 2^{42}}=\dfrac{2^{3\cdot 17}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-6}}{3^{2\cdot(-3)}\cdot 2^{42}}=\dfrac{2^{51-6}\cdot 3^{-6}}{3^{-6}\cdot 2^{42}}=2^{45-42}=2^3=8.$

2.4 b) Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\dfrac{55^2\cdot 121^{-2}\cdot 125^2}{275\cdot 605^{-2}\cdot 25^4}=\dfrac{(5\cdot 11)^2\cdot(11^2)^{-2}\cdot(5^3)^2}{5^2\cdot 11\cdot(11^2\cdot 5)^{-2}\cdot(5^2)^4}=\dfrac{5^8\cdot 11^{-2}}{5^8\cdot 11^{-3}}=11.$

2.4 c) On fait apparaître les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\dfrac{12^{-2}\cdot 15^4}{25^2\cdot 18^{-4}}=\dfrac{(2^2)^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^4\cdot 5^4}{(5^2)^2\cdot 2^{-4}\cdot(3^2)^{-4}}=\dfrac{2^{-4}\cdot 3^2\cdot 5^4}{2^{-4}\cdot 3^{-8}\cdot 5^4}=3^{10}.$

2.4 d) Même méthode que précédemment : $\dfrac{36^3\cdot 70^5\cdot 10^2}{14^3\cdot 28^2\cdot 15^6}=\dfrac{2^6\cdot 3^6\cdot 2^5\cdot 5^5\cdot 7^5\cdot 2^2\cdot 5^2}{2^3\cdot 7^3\cdot 2^4\cdot 7^2\cdot 3^6\cdot 5^6}=\dfrac{2^{13}\cdot 3^6\cdot 5^7\cdot 7^5}{2^7\cdot 3^6\cdot 5^6\cdot 7^5}=2^6\cdot 5.$

2.5 a) On met au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires : $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{x(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x^2-x}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x}{x+1}$

2.5 b) Même méthode : $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{8}{x^2-4}=\dfrac{2(x-2)-(x+2)}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{8}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{1}{x-2}$

2.5 c) On commence par simplifier les puissances superflues, puis c'est le même principe que précédemment : $\dfrac{x^2}{x^2-x}+\dfrac{x^3}{x^3+x^2}-\dfrac{2x^2}{x^3-x}=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{2x}{x+1}$

2.5 d) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+2}{x^2-4}+\dfrac{2}{x^2-2x}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{2}{x(x-2)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x(x-2)}=\dfrac{x-2+x}{x(x-2)}+\dfrac{2}{x(x-2)}=\dfrac{2}{x-2}$

Fiche nº 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) .... $\boxed{8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}}$

3.1 b) .... $\boxed{x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1}$

3.1 c) .... $\boxed{x^5 - x^3 + x^2 - 1}$

3.1 d) .... $\boxed{x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1}$

3.1 e) .... $\boxed{x^5 - x^3 - x^2 + 1}$

3.1 f) .... $\boxed{x^4 + x^2 + 1}$

3.2 a) .... $\boxed{-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4}$

3.2 b) .... $\boxed{-28 + 21x}$

3.2 c) .... $\boxed{2 + x^3 - x^4 - x^5}$

3.2 d) .... $\boxed{-1 - 3x - 3x^2 + x^3}$

3.2 e) .... $\boxed{1 + x^4}$

3.2 f) .... $\boxed{1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4}$

3.3 a) .... $\boxed{-6(6x + 7)}$

3.3 b) .... $\boxed{4(5x + 4)(-5x + 1)}$

3.3 c) .... $\boxed{2(3x - 4)(10x + 3)}$

3.3 d) .... $\boxed{-8(x + 1)(x + 16)}$

3.4 a) .... $\boxed{(x - 1)^2}$

3.4 b) .... $\boxed{(x + 2)^2}$

3.4 c) .... $\boxed{(x + 1)(x + 2)}$

3.4 d) .... $\boxed{3\left(x + \frac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7 + \sqrt{37}}{6}\right)}$

3.4 e) .... $\boxed{2\left(x + \frac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{233}}{4}\right)}$

3.4 f) .... $\boxed{-5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right)}$

3.5 a) .... $\boxed{(x + y - z)(x + y + z)}$

3.5 b) .... $\boxed{3(14x + 3y)(-4x + y)}$

3.5 c) .... $\boxed{(x + 1)(y + 1)}$

3.5 d) .... $\boxed{(x - 1)(y - 1)}$

3.5 e) .... $\boxed{(x + y)(x + 1)^2}$

3.5 f) .... $\boxed{(a^2 + b^2)(y - 4x^2)(y + 4x^2)}$

3.6 a) .... $\boxed{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}$

3.6 b) .... $\boxed{-8(x^2 + 1)(x - 4)(x + 4)}$

3.6 c) .... $\boxed{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}$

3.6 d) .... $\boxed{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$

3.6 e) .... $\boxed{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)}$

Corrigés

3.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

....

3.1 b) On peut écrire : $(x - 1)^3\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right)\left(x^2 + x + 1\right) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$. Pour être "efficace", il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p) = abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3) \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

....

3.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ et $(x+1)\left(x^2 - x + 1\right) = x^3 + 1$, on a facilement :

$$(x + 1)^2(x - 1)\left(x^2 - x + 1\right) = [(x + 1)(x - 1)]\left[(x + 1)\left(x^2 - x + 1\right)\right] = \left(x^2 - 1\right)\left(x^3 + 1\right) = x^5 - x^3 + x^2 - 1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

....

3.1 d) On calcule : $(x + 1)^2(x - 1)\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^2 + 2x + 1\right)\left(x^3 - 1\right) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$.

....

3.1 e) On calcule : $(x-1)^2(x+1)\big(x^2+x+1\big) = \big(x^2-1\big)\big(x^3-1\big) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$.

....

3.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49 = -(6x+7)(6x-1) + (6x)^2 - 7^2 = (6x+7)[-(6x-1) + 6x - 7] = -6(6x+7)$$

.

....

3.3 b) On calcule $25 - (10x+3)^2 = 5^2 - (10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)$.

....

3.4 c) La forme canonique est $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$. On en déduit la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = \dots$

....

3.4 d) La forme canonique est $3\left[\left(x+\dfrac{7}{6}\right)^2 - \dfrac{37}{36}\right]$.

....

3.4 e) La forme canonique est $2\left[\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{233}{16}\right]$.

....

3.4 f) La forme canonique est $-5\left[\left(x-\dfrac{3}{5}\right)^2 - \dfrac{4}{25}\right]$.

....

3.5 b) On calcule $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2 = (x+3y)^2 - (13x)^2 = (14x+3y)(-12x+3y) = 3(14x+3y)(-4x+y)$.

....

3.5 e) On calcule $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y = (x+y)(x^2+2x+1) = (x+y)(x+1)^2$.

....

3.6 a) On calcule $x^4 - 1 = \big(x^2-1\big)\big(x^2+1\big) = (x-1)(x+1)\big(x^2+1\big)$.

....

3.6 b) On calcule $\big(-9x^2+24\big)\big(8x^2+8\big) + 64x^4 - 64 = -8\big(x^2+1\big)\big[9x^2 - 24 - 8\big(x^2-1\big)\big] = -8\big(x^2+1\big)(x-4)(x+4)$.

....

3.6 c) On calcule $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = \big(x^2+1\big) - x^2 = \big(x^2+x+1\big)\big(x^2-x+1\big)$. La factorisation est alors terminée sur $\mathbb{R}$ puisque les deux équations, $x^2+x+1=0$ et $x^2-x+1=0$, n'ont pas de solutions réelles.

....

3.6 d) Une fois n'est pas coutume : on peut commencer par développer avant de factoriser. Ce qui donne

$$(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = \big(a^2+b^2\big)\big(c^2+d^2\big).$$

Remarque : signalons tout de même qu'une autre voie (sans calcul) consiste à interpréter en termes de module d'un produit de deux nombres complexes !

....

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

4.1 a) .... $\boxed{5}$

4.1 b) .... $\boxed{\sqrt{3}-1}$

4.1 c) .... $\boxed{-\sqrt{3}+2}$

4.1 d) .... $\boxed{\sqrt{7}-2}$

4.1 e) .... $\boxed{\pi-3}$

4.1 f) .... $\boxed{|3-a|}$

4.2 a) .... $\boxed{20}$

4.2 b) .... $\boxed{9+4\sqrt{5}}$

4.2 c) .... $\boxed{1+\sqrt{3}}$

4.2 d) .... $\boxed{3+\sqrt{2}}$

4.2 e) .... $\boxed{12\sqrt{7}}$

4.2 f) .... $\boxed{12}$

4.2 g) .... $\boxed{9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}}$

4.2 h) .... $\boxed{10}$

4.3 a) .... $\boxed{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}}$

4.3 b) .... $\boxed{3-2\sqrt{2}}$

4.3 c) .... $\boxed{1-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$

4.3 d) .... $\boxed{\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2}$

4.3 e) .... $\boxed{-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

4.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}}$

4.3 g) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.3 h) .... $\boxed{50-25\sqrt{3}}$

4.4 .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$

4.5 a) .... $\boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}}$

4.5 b) .... $\boxed{x-\sqrt{x^2-1}}$

4.5 c) .... $\boxed{1+\sqrt{x-1}}$

4.5 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}}$

4.5 e) .... $\boxed{\dfrac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}}$

4.5 f) .... $\boxed{-4(x-1)^2}$

4.6 a) .... $\boxed{\sqrt{2}}$

4.6 b) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.7 a) .... $\boxed{-11+5\sqrt{5}}$

4.7 b) .... $\boxed{1+\sqrt{2}}$

4.7 c) .... $\boxed{1+\sqrt{2}}$

4.7 d) .... $\boxed{\sqrt{3}}$

4.7 e) .... $\boxed{1+\sqrt{5}}$

4.7 f) .... $\boxed{\ln(1+\sqrt{2})}$

4.8 .... $\boxed{1}$

Corrigés

4.1 a) Quand a est un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a donc $\sqrt{(-5^2)}=5$.

....

4.1 f) On trouve $|3-a|$, c'est-à-dire $3-a$ si $a\leqslant 3$ et $a-3$ si $a\geqslant 3$.

....

4.2 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=1+\sqrt{3}.$$

....

4.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}&=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\\&=\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{2^2-2}=\frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}\\&=2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}.\end{aligned}$$

....

4.4 On pose $A := \dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. On a :

$$A = \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)\left(1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer. On a

$$A = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)}{\left(4+2\sqrt{6}\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)} = \frac{4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}-4+2\sqrt{6}}{16-24} = \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

Ainsi, on a $\boxed{\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$: ce qu'on cherchait.

Remarque : on pouvait aussi faire un autre type de quantité conjuguée :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

4.5 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{x+2f(x)} = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x-1}^2+2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1.$$

4.5 e) Le calcul donne $f''(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x-1)^{3/2}}$ d'où :

$$f(x)+4f''(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}((x-1)^2-1) = \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

4.6 a) On calcule :

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3+\sqrt{5}-2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}}+3-\sqrt{5} = 6-2\sqrt{9-5} = 6-2\sqrt{4} = 6-4 = 2.$$

De plus, $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} \geqslant 0$, donc $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

4.7 b) On calcule $3+2\sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}+1 = (\sqrt{2})^2+2\times 1\times\sqrt{2}+1^2 = (1+\sqrt{2})^2$ et on trouve donc

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

4.7 e) On calcule : $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{1+2\sqrt{5}+\sqrt{5}^2} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = 1+\sqrt{5}$.

4.8 Appelons A ce nombre barbare, et écrivons-le $A = \alpha-\beta$ en posant

$$\alpha = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} \text{ et } \beta = \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}.$$

Plutôt que de se lancer dans des choses compliquées, calculons A^3 à l'aide de l'identité remarquable. On a

$$A^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 = \alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)$$

ce qui donne

$$A^3 = 6-3A\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}\right)\left(-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}\right)}$$

d'où finalement $A^3 = 6-5A$, ce qui est équivalent à $(A-1)(A^2+A+6) = 0$ en observant que 1 est racine évidente de l'équation $t^3+5t-6 = 0$ d'inconnue t, puis finalement 1 est l'unique racine réelle de cette équation, et donc $A = 1$.

Fiche n° 5. Expressions algébriques

Réponses

5.1 a) $\boxed{7a^2+12a+7}$

5.1 b) $\boxed{a^2-a-1}$

5.1 c) $\boxed{4a^2-a-3}$

5.1 d) $\boxed{-a^2+1}$

5.2 a) $\boxed{8+6\mathrm{i}}$

5.2 b) $\boxed{8-6\mathrm{i}}$

5.2 c) $\boxed{18-26\mathrm{i}}$

5.2 d) $\boxed{-9-46\mathrm{i}}$

5.3 a) $\boxed{39-18\mathrm{i}}$

5.3 b) $\boxed{2197}$

5.3 c) $\boxed{-4+43\mathrm{i}\sqrt{5}}$

5.3 d) $\boxed{1}$

5.4 a) $\boxed{3}$

5.4 b) $\boxed{1}$

5.4 c) $\boxed{1}$

5.4 d) $\boxed{0}$

5.4 e) $\boxed{-1}$

5.4 f) $\boxed{31}$

Corrigés

5.1 a) On développe $(a+2)^3 = a^3+6a^2+12a+8$, puis on simplifie sachant que $a^3 = a^2-1$.

5.1 b) De $a^3 = a^2-1$, on déduit $a^6 = a^3(a^2-a) = a^5-a^4$ et donc $a^5-a^6 = a^4$. De plus $a^4 = a(a^2-1)$, *etc.*

5.1 c) On commence par $a^6 = (a^3)^2 = (a^2-1)^2 = a^4-2a^2+1 = -a^2-a$ puis $a^{12} = (-a^2-a)^2 = a^4+2a^3+a^2$.

5.1 d) L'égalité a^3-a^2+1 peut s'écrire $a(a-a^2)=1$ ce qui montre que $a\neq 0$ et $\dfrac{1}{a} = a-a^2$. Alors $\dfrac{1}{a^2} = 1-a$.

5.2 a) On développe : $(3+\mathrm{i})^2 = 9+6\mathrm{i}+\mathrm{i}^2$.

5.2 b) On développe : $(3-\mathrm{i})^2 = 9+6(-\mathrm{i})+(-\mathrm{i})^2 = 9-6\mathrm{i}+\mathrm{i}^2$.

5.2 c) D'après le calcul précédent : $(3-\mathrm{i})^3 = (8-6\mathrm{i})(3-\mathrm{i}) = 24-18\mathrm{i}-8\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2$.

5.2 d) On développe directement : $(3-2\mathrm{i})^3 = 3^3-3\cdot 3^2(2\mathrm{i})^1+3\cdot 3^1(2\mathrm{i})^2-(2\mathrm{i})^3$.

5.3 a) On développe : $24-30\mathrm{i}+12\mathrm{i}-15\mathrm{i}^2$.

5.3 b) En remarquant que $(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i}) = 2^2-(3\mathrm{i})^2 = 4+9$, on obtient par associativité 13^3.

5.3 c) On développe : $(-4+\mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -4^3+3\cdot 4^2(\mathrm{i}\sqrt{5})-3\cdot 4^1(\mathrm{i}\sqrt{5})^2+(\mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -64+48\mathrm{i}\sqrt{5}+60-5\mathrm{i}\sqrt{5}$.

5.3 d) On développe : $(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = -\dfrac{1}{8}+3\cdot i\dfrac{\sqrt{3}}{8}+3\cdot\dfrac{3}{8}-i\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

5.4 a) De $a^5=1$, on déduit $a^7=a^2$ et $a^6=a$ donc tous les termes se simplifient sauf deux : $4-1=3$.

5.4 b) On commence par $a^{1234} = (a^{10})^{123}\times a^4 = a^4$ car $a^{10} = (a^5)^2 = 1$. De même $a^{2341} = a^1$, *etc.* et on obtient donc finalement $a^4\times a^1\times a^2\times a^3 = a^{10} = 1$.

5.4 c) Ceci vaut a^S où $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{1234} k = \dfrac{1234\times(1234+1)}{2}$ est un entier multiple de 5.

5.4 d) Cette somme partielle de suite géométrique vaut $\dfrac{a^5-1}{a-1}$.

....

5.4 e) Cette somme géométrique vaut $\dfrac{a^{99}-1}{a-1} \times a^1 = \dfrac{a^{100}-a}{a-1} = \dfrac{1-a}{a-1} = -1$.

....

5.4 f) En réordonnant les facteurs et en développant, on obtient :

$$(2-a^1)(2-a^4)(2-a^2)(2-a^3) = (5-2(a+a^4))(5-2(a^2+a^3)) = 25-10(a+a^2+a^3+a^4)+4(a+a^4)(a^2+a^3).$$

Or $a+a^2+a^3+a^4=-1$ et $(a+a^4)(a^2+a^3) = a^3+a^6+a^4+a^7 = a+a^2+a^3+a^4 = -1$ aussi.

....

Fiche n° 6. Équations du second degré

Réponses

6.1 a) .... $\boxed{3,3}$

6.1 b) .... $\boxed{-1/3, -1/3}$

6.1 c) .... $\boxed{2, -6}$

6.1 d) .... $\boxed{2, 3}$

6.1 e) .... $\boxed{0,\text{ donc } 5}$

6.1 f) .... $\boxed{0,\text{ donc } -3/2}$

6.1 g) .... $\boxed{\varnothing}$

6.1 h) .... $\boxed{1 \text{ donc } -5}$

6.1 i) .... $\boxed{1 \text{ donc } 8/3}$

6.1 j) .... $\boxed{-1 \text{ donc } -19/5}$

6.2 a) .... $\boxed{6, 7}$

6.2 b) .... $\boxed{-3, -5}$

6.2 c) .... $\boxed{-7, -11}$

6.2 d) .... $\boxed{-3, 11}$

6.2 e) .... $\boxed{a, b}$

6.2 f) .... $\boxed{a-b, a+b}$

6.3 a) .... $\boxed{2/3}$

6.3 b) .... $\boxed{-2/7}$

6.3 c) .... $\boxed{-1/m}$

6.3 d) .... $\boxed{2m/(m+3)}$

6.4 a) .... $\boxed{a = 2 \text{ et } b = 3}$

6.4 b) .... $\boxed{a = -2 \text{ et } b = 1}$

6.4 c) .... $\boxed{a = -3 \text{ et } b = 5}$

6.4 d) .... $\boxed{a = 1/2 \text{ et } b = 8}$

6.4 e) .... $\boxed{a = 1 \text{ et } b = 3\sqrt{7}}$

6.5 a) .... $\boxed{]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[}$

6.5 b) .... $\boxed{[-3, 5]}$

6.5 c) .... $\boxed{]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[}$

6.5 d) .... $\boxed{]-\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[}$

Corrigés

6.1 a) C'est une identité remarquable : $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

....

6.1 c) Le nombre 2 est racine évidente, l'autre est donc -6 en regardant le produit des racines qui vaut -12.

....

6.1 e) La racine 0 est la racine évidente par excellence ; la somme des racines valant ici 5 l'autre racine est 5.

....

6.1 g) La fonction $x \longmapsto 2x^2 + 3$ est strictement postivie car elle est minorée par 3, donc elle ne s'annule pas.

....

6.2 a) Ici on cherche des racines un peu moins évidentes : on remplace le problème par le problème équivalent de la détermination de deux nombres x_1, x_2 dont le produit vaut 42 et la somme 13. On teste donc les factorisations évidentes de 42, ici $42 = 6 \times 7$ et $13 = 6 + 7$.

....

6.2 b) On cherche deux nombres dont le produit vaut 15 et la somme -8 : les nombres -3 et -5 conviennent.

....

6.5 a) Un trinôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur de l'intervalle des racines, et du signe opposé entre les racines. Ici, les racines sont $\sqrt{2}$ et 1, le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement négatif sur $]1, \sqrt{2}[$.

....

6.5 b) Les racines sont -5 et 3. Le trinôme est donc strictement négatif sur $]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ et strictement positif sur $]-3, 5[$.

....

6.5 c) Ici, les racines sont -1 et $2/3$. Le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, -1[\cup]2/3, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1, 2/3[$.

....

6.5 d) Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit ! Donc le quotient considéré est strictement positif sur $]-\infty, -1/2[\cup]4, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1/2, 4[$ (attention à l'annulation du dénominateur !).

....

Fiche n° 7. Exponentielle et logarithme

Réponses

7.1 a) .... $\boxed{4\ln 2}$

7.1 b) .... $\boxed{9\ln 2}$

7.1 c) .... $\boxed{-3\ln 2}$

7.1 d) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$

7.1 e) .... $\boxed{3\ln 2}$

7.1 f) .... $\boxed{2\ln 2+2\ln 3}$

7.2 a) .... $\boxed{-\ln 3-2\ln 2}$

7.2 b) .... $\boxed{2\ln 3-2\ln 2}$

7.2 c) .... $\boxed{\ln 3+11\ln 2}$

7.2 d) .... $\boxed{3\ln 5+2\ln 2}$

7.2 e) .... $\boxed{-2\ln 5+4\ln 2}$

7.2 f) .... $\boxed{2\ln 5-2\ln 2}$

7.3 .... $\boxed{-2\ln 2-2\ln 5}$

7.4 a) .... $\boxed{\frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)}$

7.4 b) .... $\boxed{17+12\sqrt{2}}$

7.4 c) .... $\boxed{0}$

7.4 d) .... $\boxed{0}$

7.5 a) .... $\boxed{8}$

7.5 b) .... $\boxed{\frac{1}{2}}$

7.5 c) .... $\boxed{\frac{1}{3}}$

7.5 d) .... $\boxed{\frac{1}{9}}$

7.5 e) .... $\boxed{-\frac{1}{2}}$

7.5 f) .... $\boxed{\frac{3}{2}}$

7.6 a) .... $\boxed{-2}$

7.6 b) .... $\boxed{\frac{1}{\ln 2}}$

7.6 c) .... $\boxed{-17}$

7.6 d) .... $\boxed{1}$

7.6 e) .... $\boxed{-1}$

7.6 f) .... $\boxed{e}$

7.7 a) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.7 b) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.7 c) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.7 d) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.8 a) .... $\boxed{\mathbb{R}}$

7.8 b) .... $\boxed{\text{ok}}$

7.8 c) .... $\boxed{1}$

7.8 d) .... $\boxed{-1}$

7.9 a) .... $\boxed{x+\ln 2}$

7.9 b) .... $\boxed{\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+x}}}$

7.9 c) .... $\boxed{\ln|x-1|}$

7.9 d) .... $\boxed{-\frac{1}{1+x}}$

7.9 e) .... $\boxed{\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}}$

7.10 a) .... $\boxed{x \geqslant \frac{\ln 12+5}{3}}$

7.10 b) .... $\boxed{x\in[0,1]}$

7.10 c) .... $\boxed{x \geqslant \frac{2}{e}}$

7.10 d) .... $\boxed{x \geqslant -\frac{1}{12}}$

7.10 e) .... $\boxed{\varnothing}$

7.10 f) .... $\boxed{\frac{-13-\sqrt{273}}{2}}$

Corrigés

7.1 a) On a $16=4^2=2^4$ donc $\ln 16=4\ln 2$.

....

7.1 c) On a $0{,}125=\frac{1}{8}$ donc $\ln 0{,}125=-\ln 8=-3\ln 2$.

....

7.1 e) On a $72=8\times 9=2^3\times 3^2$ donc $\ln 72-2\ln 3=(3\ln 2+2\ln 3)-2\ln 3=3\ln 2$.

....

7.2 c) On a $0{,}875=\frac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned}\ln 21+2\ln 14-3\ln(0{,}875) &= (\ln 3+\ln 7)+2(\ln 2+\ln 7)-3(\ln 7-\ln 8)\\ &= \ln 3+2\ln 3+3\times 3\ln 2=3\ln 3+11\ln 2.\end{aligned}$$

....

7.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln 98 - \ln 99) + (\ln 99 - \ln 100)$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

On peut écrire plus rigoureusement ce calcul :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{99} \ln \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{99} (\ln k - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{j=2}^{100} \ln j \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k+1$ d'où finalement $A = \ln 1 - \ln 100 = -2(\ln 2 + \ln 5)$.

7.4 a) On a $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$

On a donc

$$\alpha = \frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \frac{7}{16} \ln((1+\sqrt{2})^2) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{7}{8} \ln(1+\sqrt{2}) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

d'où finalement $\alpha = -\dfrac{7}{8} \ln \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + 4 \ln \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8} \ln \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8} \ln(\sqrt{2}-1)$.

7.4 c) On a $\gamma = \ln\Big(\big((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\big)^{20}\Big) = \ln\big(\big((4-3)^{20}\big)\big) = 0$

7.6 b) On a $\mathrm{e}^{-\ln \ln 2} = \mathrm{e}^{(-1)\ln(\ln 2)} = (\ln 2)^{-1} = \dfrac{1}{\ln 2}$.

7.6 e) On a $\ln\Big(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\Big) = \dfrac{1}{2} \ln\big(\exp(-\ln \mathrm{e}^2)\big) = \dfrac{1}{2}(-\ln \mathrm{e}^2)) = \dfrac{1}{2} \times (-2) = -1$.

7.7 a) f_1 est définie sur $]-2021, +2021[$ qui est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in\,]-2021, +2021[, \quad f(-x) = \ln \frac{2021 - x}{2021 + x} = \ln \frac{1}{\frac{2021+x}{2021-x}} = -\ln \frac{2021+x}{2021-x} = -f_1(x).$$

7.7 b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant |x| < \sqrt{x^2+1}$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) \\ &= \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln \frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= \ln \frac{-x^2 + (x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}} = \ln \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = -f_2(x). \end{aligned}$$

7.10 f) Attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Pour la première équation, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big(]61, +\infty[\cap]-\infty, -7[\Big)$, qui est l'ensemble vide, donc la première équation n'admet aucune solution.

Pour la seconde, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big(]-\infty, -7[\cup]61, +\infty[\Big)$, c'est-à-dire dans l'intervalle $]-\infty, -7[$. Dans ce cas, un réel x appartenant à $]-\infty, -7[$ est solution de l'équation si et seulement si x vérifie $x^2 + 13x - 26 = 0$. Or, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-13-\sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-13+\sqrt{273}}{2}$. Seul x_1 convient car $x_1 \in\,]-\infty, -7[$ et $x_2 \notin\,]-\infty, -7[$.

Fiche n° 8. Trigonométrie

Réponses

8.1 a) .... $\boxed{0}$

8.1 b) .... $\boxed{0}$

8.1 c) .... $\boxed{-1-\sqrt{3}}$

8.1 d) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

8.2 a) .... $\boxed{0}$

8.2 b) .... $\boxed{-\sin x}$

8.2 c) .... $\boxed{2\cos x}$

8.2 d) .... $\boxed{-2\cos x}$

8.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

8.3 b) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

8.3 c) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

8.3 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}$

8.4 a) .... $\boxed{-\sin x}$

8.4 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{\cos x}}$

8.4 c) .... $\boxed{0}$

8.4 d) .... $\boxed{4\cos^3 x - 3\cos x}$

8.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

8.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

8.6 a) .... $\boxed{\tan x}$

8.6 b) .... $\boxed{2}$

8.6 c) .... $\boxed{8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right\}}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{-2\pi}{3}, \dfrac{-\pi}{3}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 d) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}}$

8.7 d) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right\}}$

8.7 d) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 e) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}}$

8.7 e) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}}$

8.7 e) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 f) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}}$

8.7 f) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}}$

8.7 f) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 g) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}\right\}}$

8.7 g) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{11\pi}{12}, -\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}\right\}}$

8.7 g) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{11\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 h) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}}$

8.7 h) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}}$

8.7 h) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 i) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{7}, \dfrac{13\pi}{7}\right\}}$

8.7 i) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{7}, \dfrac{\pi}{7}\right\}}$

8.7 i) ...... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{7}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\dfrac{\pi}{7}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 j) .... $\boxed{\left\{\dfrac{5\pi}{14}, \dfrac{9\pi}{14}\right\}}$

8.7 j) .... $\boxed{\left\{\dfrac{5\pi}{14}, \dfrac{9\pi}{14}\right\}}$

8.7 j) ...... $\boxed{\left\{\dfrac{5\pi}{14}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{9\pi}{14}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.8 a) .... $\boxed{\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{4}, 2\pi\right]}$

8.8 a) .... $\boxed{\left[-\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]}$

8.8 b) .... $\boxed{\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]}$

8.8 b) .... $\boxed{\left[-\pi, -\dfrac{\pi}{3}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]}$

8.8 c) .... $\boxed{\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6}, 2\pi\right]}$

8.8 c) .... $\boxed{\left[-\pi, \dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]}$

8.8 d) .... $\boxed{\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{11\pi}{6}, 2\pi\right]}$

8.8 d) .... $\boxed{\left[-\pi, -\dfrac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]}$

8.8 e) .... $\boxed{\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[}$

8.8 e) .... $\boxed{\left[-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[}$

8.8 f) ..... $\boxed{\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right]}$

8.8 f) .... $\boxed{\left[-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right]}$

8.8 g) .... $\boxed{\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right]}$

8.8 g) .... $\boxed{\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]}$

8.8 h) .... $\boxed{\left[0, \dfrac{3\pi}{8}\right]\cup\left[\dfrac{7\pi}{8}, \dfrac{11\pi}{8}\right]\cup\left[\dfrac{15\pi}{8}, 2\pi\right]}$

8.8 h) .... $\boxed{\left[-\pi, -\dfrac{5\pi}{8}\right]\cup\left[-\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{8}\right]\cup\left[\dfrac{7\pi}{8}, \pi\right]}$

Corrigés

8.3 b) On peut utiliser $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ puis les formules d'addition.

....

8.4 b) On a

$$\frac{\sin 2x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\cos x}=\frac{\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin(2x-x)}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\cos x}.$$

On peut aussi faire cette simplification à l'aide des formules de duplication :

$$\frac{\sin 2x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}-\frac{2\cos^2 x-1}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}$$

....

8.4 d) On calcule

$$\begin{aligned}\cos(3x)=\cos(2x+x)&=\cos(2x)\cos x-\sin(2x)\sin x=(2\cos^2 x-1)\cos x-2\cos x\sin^2 x\\&=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x(1-\cos^2 x)=4\cos^3 x-3\cos x.\end{aligned}$$

....

8.5 a) On a $\cos\dfrac{\pi}{4}=2\cos^2\dfrac{\pi}{8}-1$ donc $\cos^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}$. De plus, $\cos\dfrac{\pi}{8}\geqslant 0$ donc $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

....

8.5 b) On a $\sin^2\dfrac{\pi}{8}=1-\cos^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$et $\sin\dfrac{\pi}{8}\geqslant 0$ donc $\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

....

8.6 a) On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ donc $\dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \dfrac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \tan x$.

8.6 b) On a $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \dfrac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} = \dfrac{\sin(3x-x)}{\sin x \cos x} = \dfrac{\sin(2x)}{\sin x} = \dfrac{2\sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2$.

8.6 c) On a $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

8.7 e) Cela revient à résoudre « $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ».

8.7 g) Si on résout avec $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x \in [0, 4\pi]$.

Or, dans $[0, 4\pi]$, on a $\cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour $t \in \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{13\pi}{6}, \dfrac{23\pi}{6}\right\}$ et donc pour $x \in \left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}\right\}$.

8.7 h) $\sin x$ est solution de l'équation de degré 2 : $2t^2 + t - 1 = 0$ dont les solutions sont $t = -1$ et $t = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, les x solutions sont les x tels que $\sin x = -1$ ou $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

8.7 j) On a $\cos\dfrac{\pi}{7} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{7}\right) = \sin\dfrac{5\pi}{14}$. Finalement, on résout $\sin x = \sin\dfrac{5\pi}{14}$.

8.8 d) Cela revient à résoudre $-\dfrac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

8.8 f) On résout « $\tan x \geqslant 1$ ou $\tan x \leqslant -1$ ».

8.8 g) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = x - \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geqslant 0$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$ et donc $x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

8.8 h) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x - \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 4\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geqslant 0$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 4\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{2}, \dfrac{15\pi}{4}\right]$ puis $x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{8}, \dfrac{11\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$.

Fiche n° 9. Dérivation

Réponses

9.1 a) $\boxed{6x^2+2x-11}$

9.1 b) $\boxed{5x^4-6x^2+4x-15}$

9.1 c) $\boxed{(2x^2-2x+10)\exp(2x)}$

9.1 d) $\boxed{(6x-1)\ln(x-2)+\dfrac{3x^2-x}{x-2}}$

9.2 a) $\boxed{5(x^2-5x)^4(2x-5)}$

9.2 b) $\boxed{4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)}$

9.2 c) $\boxed{8\cos^2(x)-6\cos(x)\sin(x)-4}$

9.2 d) $\boxed{-3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x))}$

9.3 a) $\boxed{\dfrac{2x}{x^2+1}}$

9.3 b) $\boxed{\dfrac{1}{x\ln(x)}}$

9.3 c) $\boxed{(-2x^2+3x+1)\exp(x^2+x)}$

9.3 d) $\boxed{6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))}$

9.4 a) $\boxed{\dfrac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)}$

9.4 b) $\boxed{\dfrac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2}\sin\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)}$

9.4 c) $\boxed{\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}}$

9.4 d) $\boxed{\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}$

9.5 a) $\boxed{\dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}}$

9.5 b) $\boxed{\dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}}$

9.5 c) $\boxed{-2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}}$

9.5 d) $\boxed{\dfrac{(4x+3)\ln(x)-2x-3}{(\ln(x))^2}}$

9.6 a) $\boxed{2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

9.6 b) $\boxed{\dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}}$

9.6 c) $\boxed{\dfrac{1}{1-x^2}}$

9.6 d) $\boxed{\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}}$

9.7 a) $\boxed{\dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}}$

9.7 b) $\boxed{\dfrac{2}{x+1}\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}$

9.7 c) $\boxed{\dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}}$

9.7 d) $\boxed{\dfrac{x^2}{(x+1)^2}}$

9.7 e) $\boxed{\dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}}$

Corrigés

9.1 a) On calcule : $f'(x)=(2x+3)(2x-5)+(x^2+3x+2)\times 2=6x^2+2x-11$.

9.1 b) On calcule : $f'(x)=(3x^2+3)(x^2-5)+(x^3+3x+2)\times 2x=5x^4-6x^2+4x-15$.

9.1 c) On calcule : $f'(x)=(2x-2)\exp(2x)+(x^2-2x+6)\times 2\exp(2x)=(2x^2-2x+10)\exp(2x)$.

9.1 d) On calcule : $f'(x)=(6x-1)\ln(x-2)+(3x^2-x)\times\dfrac{1}{x-2}=(6x-1)\ln(x-2)+\dfrac{3x^2-x}{x-2}$.

9.2 a) On calcule : $f'(x)=5(x^2-5x)^4(2x-5)$.

9.2 b) On calcule : $f'(x) = 2(2x^3+4x-1)(6x^2+4) = 4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)$.

....

9.2 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin(x)+2\cos(x))(\cos(x)-2\sin(x)) = 2(\sin(x)\cos(x)-2\sin^2(x)+2\cos^2(x)-4\cos(x)\sin(x) \\ &= -6\cos(x)\sin(x)-4\sin^2(x)+4\cos^2(x) = -6\cos(x)\sin(x)-4(1-\cos^2(x))+4\cos^2(x) \\ &= 8\cos^2(x)-6\cos(x)\sin(x)-4. \end{aligned}$$

....

9.2 d) On calcule : $f'(x) = 3(3\cos(x)-\sin(x))^2(-3\sin(x)-\cos(x)) = -3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x))$. En développant, on trouve : $f'(x) = -54\cos^2(x)\sin(x)-78\cos^3(x)-9\sin(x)+51\cos(x)$.

....

9.3 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. C'est une application directe de la formule de dérivation quand $f = \ln\circ u$.

....

9.3 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1/x}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

....

9.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\exp(x^2+x)+(2-x)\exp(x^2+x)\times(2x+1) = (-1+(2-x)(2x+1))\exp(x^2+x) \\ &= (-1+4x+2-2x^2-x)\exp(x^2+x) = (-2x^2+3x+1)\exp(x^2+x). \end{aligned}$$

....

9.3 d) On calcule : $f'(x) = \exp(3\sin(2x))(3\times 2\cos(2x)) = 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$.

....

9.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big)\times\frac{4x(x^2+1)-(2x^2-1)\times 2x}{(x^2+1)^2} = \cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big)\frac{4x^3+4x-4x^3+2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big). \end{aligned}$$

....

9.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big)\times\frac{2(x^2+4)-(2x+1)\times 2x}{(x^2+4)^2} = -\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big)\times\frac{2x^2+8-4x^2-2x}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2}\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big). \end{aligned}$$

....

9.4 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin(x)}}\cos(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$.

....

9.4 d) On calcule : $f'(x) = \cos(\sqrt{x})\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

....

9.5 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$. En développant le numérateur, on trouve

$$f'(x) = \frac{-2x^2\cos(x)+4x\sin(x)-6x\cos(x)+6\sin(x)+6x+9}{(2\sin(x)+3)^2}.$$

....

9.5 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2)-\sqrt{x}\times 3}{(3x+2)^2} = \dfrac{\frac{3x+2}{2\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(3x+2)^2} = \dfrac{3x+2-6x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$

....

9.5 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-2\sin(2x+1)\times(x^2+1)-\cos(2x+1)\times 2x}{(x^2+1)^2} = -2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$.

....

9.5 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - (2x^2+3x)\dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

....

9.6 a) On calcule : $f'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \times \left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

....

9.6 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2} - x\frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x)}{\sqrt{9-x^2}^2} = \dfrac{\sqrt{9-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \dfrac{\frac{9-x^2+x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$

....

9.6 c) On a trois fonctions composées à la suite : $f = \ln(\sqrt{u})$). Donc on a, en appliquant deux fois la formule de dérivée d'une fonction composée : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u-x)}} \times u'(x) \times \dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$.

On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} \times \frac{1(x-1)-(x+1)\times 1}{(x-1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} \\ &= \frac{1}{2\times\dfrac{x+1}{x-1}} \times \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

....

9.6 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\cos(x)\times x - \sin(x)\times 1}{x^2} \times \dfrac{x}{\sin(x)} = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\sin(x)}$.

....

9.7 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-(-1)}{(3-x)^2} + \dfrac{-1}{(2+x)^2} = \dfrac{(2+x)^2 - (3-x)^2}{(3-x)^2(2+x)^2} = \dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$.

....

9.7 b) On calcule : $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x(x+1)-1}{x+1} = \dfrac{2x^2+2x-1}{x+1}$.

Pour le trinôme $2x^2+2x-1$, on calcule $\Delta = 4 - 4\times 2\times(-1) = 12$. On a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2\times 2} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Enfin, on a $f'(x) = \dfrac{2(x - \frac{-1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{-1+\sqrt{3}}{2}}{x+1} = \dfrac{2}{x+1}\left(x + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

....

9.7 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+2} - \dfrac{1\times(x-1)-(x+2)\times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$.

On cherche les racines du trinôme x^2+x-2 dont le discriminant est $\Delta = 1+8 = 9$; on identifie deux racines $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. D'où la forme factorisée : $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$.

Alors : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \dfrac{3}{(x-1)^2} = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)^2} + \dfrac{3(x+2)}{(x+2)(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

Le trinôme $2x^2+2x+5$ dont le discriminant est $\Delta = 4 - 4\times 2\times 5 = -36 < 0$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

....

9.7 d) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\times(x+1) - x\times 1}{(x+1)^2} + 1 - 2\frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{1+(x+1)^2 - 2(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1+x^2+2x+1-2x-2}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

....

9.7 e) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1-\ln(x)) - (1+\ln(x))\frac{-1}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{2}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$.

....

Fiche n° 10. Primitives

Réponses

10.1 a) $\boxed{\ln|t+1|}$

10.1 b) $\boxed{-\dfrac{3}{t+2}}$

10.1 c) $\boxed{-\dfrac{3}{2(t+2)^2}}$

10.1 d) $\boxed{-\dfrac{\cos(4t)}{4}}$

10.2 a) $\boxed{\dfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}}$

10.2 b) $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}}$

10.2 c) $\boxed{\dfrac{1}{3}\mathrm{Arctan}(3t)}$

10.3 a) $\boxed{\dfrac{2}{3}\ln|1+t^3|}$

10.3 b) $\boxed{\dfrac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}$

10.3 c) $\boxed{-\sqrt{1-t^2}}$

10.3 d) $\boxed{\dfrac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}}$

10.3 e) $\boxed{\dfrac{1}{6}\ln(1+3t^2)}$

10.3 f) $\boxed{-\dfrac{1}{(1+3t^2)^2}}$

10.4 a) $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln^4 t}$

10.4 b) $\boxed{2\sqrt{\ln t}}$

10.4 c) $\boxed{\dfrac{2}{(3-\mathrm{e}^{2t})^2}}$

10.4 d) $\boxed{-\dfrac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}}$

10.4 e) $\boxed{\ln|1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}|}$

10.4 f) $\boxed{-\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}$

10.5 a) $\boxed{-\dfrac{1}{3}\cos^3 t}$

10.5 b) $\boxed{\mathrm{e}^{\sin t}}$

10.5 c) $\boxed{-\ln|\cos t|}$

10.5 d) $\boxed{-\ln|1-\sin t|}$

10.5 e) $\boxed{-2\cos\sqrt{t}}$

10.5 f) $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\sin(\pi\ln t)}$

10.5 g) $\boxed{\tan t - t}$

10.5 h) $\boxed{\dfrac{1}{2}\tan^2 t+\ln|\cos t|}$

10.5 i) $\boxed{\dfrac{1}{4}\tan^4 t}$

10.5 j) $\boxed{2\sqrt{\tan t}}$

10.5 k) $\boxed{-\dfrac{1}{\tan t}}$

10.5 l) $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-\sin t)^2}}$

10.5 m) $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(2t)}$

10.5 n) $\boxed{\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^t)}$

10.6 a) $\boxed{\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sin(2t)}{4}}$

10.6 b) $\boxed{-\dfrac{\cos(4t)}{8}-\dfrac{\cos(2t)}{4}}$

10.6 c) $\boxed{-\cos t+\dfrac{1}{3}\cos^3 t}$

10.7 a) $\boxed{t+\ln t-\dfrac{1}{t}}$

10.7 b) $\boxed{\ln t-\dfrac{1}{2t^2}}$

10.7 c) $\boxed{t-2\ln|t+1|}$

10.7 d) $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)-\mathrm{Arctan}(t)}$

10.7 e) $\boxed{\ln|t+1|+\dfrac{1}{t+1}}$

10.8 a) $\boxed{2(t-1) \text{ puis } \dfrac{1}{3}t^3-t^2+5t}$

10.8 b) $\boxed{-\dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{2}{t}+1\right) \text{ puis } -\dfrac{1}{t}+\ln|t|}$

10.8 c) $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}+\dfrac{3}{t^4} \text{ puis } \dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2t^2}}$

10.8 d) $\boxed{-\dfrac{4}{t^5}-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{t^{5/2}} \text{ puis } -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{t^3}-\dfrac{2}{\sqrt{t}}}$

10.8 e) .... $\boxed{2e^{2t} - 3e^{-3t} \text{ puis } \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-3t}}$

10.8 f) .... $\boxed{3e^{3t-2} \text{ puis } \frac{1}{3}e^{3t-2}}$

10.8 g) ..... $\boxed{-\frac{t(t^3+2)}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2} \text{ puis } \frac{1}{3}\ln(|t^3-1|)}$

10.8 h) .. $\boxed{-\frac{3t^2-2t-3}{(t^2+1)^2} \text{ puis } \frac{3}{2}\ln(t^2+1) - \operatorname{Arctan}(t)}$

10.8 i)........... $\boxed{\cos t(3\cos^2 t - 2) \text{ puis } -\frac{1}{3}\cos^3 t}$

10.8 j) .... $\boxed{-\frac{2t\sin\frac{1}{t} + \cos\frac{1}{t}}{t^4} \text{ puis } \cos\frac{1}{t}}$

10.8 k).................. $\boxed{\frac{2e^t}{(2+e^t)^2} \text{ puis } \ln(2+e^t)}$

10.8 l) .... $\boxed{\frac{2\cos t + 3}{(2+3\cos t)^2} \text{ puis } -\frac{1}{3}\ln|2+3\cos t|}$

10.8 m) .... $\boxed{\frac{1}{(1-t^2)^{3/2}} \text{ puis } -\sqrt{1-t^2}}$

10.8 n) .... $\boxed{(1-2t^2)e^{-t^2} \text{ puis } -\frac{1}{2}e^{-t^2}}$

10.8 o) .... $\boxed{\frac{\ln t - 2}{t^2} \text{ puis } \ln t - \frac{1}{2}\ln^2 t}$

10.8 p) .... $\boxed{-\frac{1+\ln t}{t^2\ln^2 t} \text{ puis } \ln|\ln t|}$

10.8 q).......... $\boxed{\frac{\cos\ln t - \sin\ln t}{t^2} \text{ puis } -\cos(\ln t))}$

10.8 r)............. $\boxed{-\frac{e^t(e^{2t}-1)}{(1+e^{2t})^2}) \text{ puis } \operatorname{Arctan}(e^t)}$

Corrigés

10.1 a) Admet des primitives sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$.

10.1 b) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

10.1 c) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

10.1 d) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

10.2 a) Admet des primitives sur $]0,+\infty[$.

10.2 b) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

10.2 c) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

10.5 g) $\int^t \tan^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \int^t ((1+\tan^2\theta)-1)\,\mathrm{d}\theta = \tan t - t + \mathrm{cte}$

10.5 h) $\int^t \tan^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \int^t ((\tan^2\theta+1)\tan\theta - \tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\tan^2 t + \ln|\cos t| + \mathrm{cte}$

10.6 a) $\int^x \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + \mathrm{cte}$

10.6 b) On a

$$\begin{aligned}\int^t \cos(\theta)\sin(3\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int^t \frac{1}{2}(\sin(3\theta+\theta)+\sin(3\theta-\theta))\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int^t \frac{1}{2}(\sin(4\theta)+\sin(2\theta))\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\cos(4t)}{8} - \frac{\cos(2t)}{4} + \mathrm{cte}.\end{aligned}$$

10.6 c) $\int^t \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \int^t (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t + \mathrm{cte}$

10.7 c) $\displaystyle\int^t \frac{\theta-1}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{\theta+1-2}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(1-\frac{2}{\theta+1}\right)\mathrm{d}\theta = t - 2\ln|t+1| + \mathrm{cte}$

10.7 e) $\displaystyle\int^t \frac{\theta}{(\theta+1)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{\theta+1-1}{(\theta+1)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(\frac{1}{\theta+1}-\frac{1}{(\theta+1)^2}\right)\mathrm{d}\theta = \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} + \mathrm{cte}$

Fiche n° 11. Calcul d'intégrales

Réponses

11.1 a) .... $\boxed{\text{Positif}}$

11.1 b) .... $\boxed{\text{Négatif}}$

11.1 c) .... $\boxed{\text{Positif}}$

11.2 a) .... $\boxed{14}$

11.2 b) .... $\boxed{50}$

11.2 c) .... $\boxed{\dfrac{147}{2}}$

11.2 d) .... $\boxed{-54}$

11.2 e) .... $\boxed{0}$

11.2 f) .... $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

11.3 a) .... $\boxed{8}$

11.3 b) .... $\boxed{-2}$

11.3 c) .... $\boxed{\dfrac{8}{3}}$

11.3 d) .... $\boxed{0}$

11.3 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{30}}$

11.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{2}{101}}$

11.4 a) .... $\boxed{0}$

11.4 b) .... $\boxed{1}$

11.4 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

11.4 d) .... $\boxed{18}$

11.4 e) ...... $\boxed{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}}$

11.4 f) .... $\boxed{-\ln 3}$

11.5 a) .... $\boxed{78}$

11.5 b) ..... $\boxed{2(\mathrm{e}^3 - 1)}$

11.5 c) . $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\ln\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)}$

11.5 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{6}}$

11.5 e) .... $\boxed{6}$

11.5 f) ...... $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

11.6 a) .... $\boxed{0}$

11.6 b) .... $\boxed{0}$

11.6 c) ..... $\boxed{\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)}$

11.6 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{384}}$

11.6 e) ... $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)}$

11.6 f) .... $\boxed{\dfrac{7}{48}}$

11.7 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\mathrm{e}+1}}$

11.7 b) .... $\boxed{\dfrac{17}{2}}$

11.7 c) .... $\boxed{\mathrm{e}^2}$

11.7 d) .... $\boxed{3\mathrm{e} - 4}$

11.7 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{3}}$

11.8) .... $\boxed{0}$

11.8 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

11.8 b) .... $\boxed{\dfrac{99}{\ln 10}}$

11.8 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

11.8 d) .... $\boxed{\dfrac{2\pi}{9}}$

Corrigés

11.1 a) On intègre une fonction positive et les bornes sont « dans le bon sens ».

11.1 b) $\displaystyle\int_5^{-3} |\sin 7x|\,\mathrm{d}x = -\int_{-3}^{5} |\sin 7x|\,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. Elle est positive car on intègre une fonction positive.

11.1 c) $\displaystyle\int_0^{-1} \sin x\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. sin est négative sur $[-\pi, 0]$ donc sur $[-1, 0]$, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x$ est donc négative.

11.2 a) Il s'agit de l'aire d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 7.

11.2 b) On commence par mettre les bornes « dans le bon sens » : $\displaystyle\int_7^{-3} -5\,\mathrm{d}x = -\int_{-3}^{7} -5\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{7} 5\,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale est l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 10 et 5.

11.2 c) Il s'agit de l'aire du triangle dont les sommets sont l'origine O, le point $A(7;0)$ et $B(7;21)$. Ce triangle est rectangle en A et son aire est $\dfrac{1}{2} \times AO \times AB$.

11.2 d) Les bornes sont « dans le bon sens », on peut donc interpréter l'intégrale comme une aire algébrique. Sur l'intervalle $[2, 8]$, la courbe de $f(x) = 1 - 2x$ est située sous l'axe des abscisses, l'aire algébrique sera négative.

Il s'agit de calculer l'aire du trapèze rectangle dont les sommets sont $A(2;0)$, $B(8;0)$, $C(8;-15)$ et $D(2;-3)$. L'aire de ce trapèze rectangle est $\dfrac{1}{2} \times AB \times (AD + BC) = \dfrac{1}{2} \times 6 \times (3 + 15)$.

11.2 e) Avec la relation de Chasles, on a $\int_{-2}^{2} \sin x \, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \sin x \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \sin x \, \mathrm{d}x$.La fonction sinus étant impaire, les aires algébriques $\int_{-2}^{0} \sin x \, \mathrm{d}x$ et $\int_{0}^{2} \sin x \, \mathrm{d}x$ sont opposées, il suit que leur somme est nulle.

11.2 f) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique. Cette aire est composée de deux triangles rectangles (les intégrales de -2 à 0 et de 0 à 1).

11.3 a) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique d'un rectangle.

11.3 b) $\int_{1}^{3} 2x - 5 \, \mathrm{d}x = \Big[x^2 - 5x\Big]_1^3 = (3^2 - 15) - (1^2 - 5) = -2.$

11.3 c) $\int_{-2}^{0} x^2 + x + 1 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2\right) = \frac{8}{3}.$

11.3 d) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.3 e) $\int_{0}^{1} x^5 - x^4 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}.$

11.3 f) $\int_{1}^{-1} x^{100} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{101}x^{101}\right]_1^{-1} = -\frac{2}{101}.$

11.4 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.4 b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \, \mathrm{d}x = \Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$

11.4 c) $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

11.4 d) $\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{100} = 18.$

11.4 e) $\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_{-3}^{2} = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}.$

11.4 f) $\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-3}^{-1} = -\ln 3.$

11.5 a) $\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{8}(2x+1)^4\right]_{-1}^{2} = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78.$

11.5 b) $\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} \, \mathrm{d}x = \Big[2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\Big]_{-2}^{4} = 2(\mathrm{e}^3 - 1).$

11.5 c) $\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x + 2} = \left[\frac{1}{\pi}\ln|\pi x + 2|\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{\pi + 2}{2}\right).$

11.5 d) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}.$

11.5 e) $\int_{0}^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\right]_0^{33} = \frac{2}{3}(10 - 1) = 6.$

11.5 f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\mathrm{d}x = \left[-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

11.6 a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)\right]_1^3 = 0.$

11.6 b) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.6 c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x}x\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

11.6 d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^5\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}(\cos x)^6\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6.$

11.6 e) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$

11.6 f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,\frac{-1}{3}\,\frac{1}{(x^2+1)^3}\right]_0^1 = \frac{7}{48}.$

11.7 a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{\mathrm{e}+1}+\frac{1}{2}.$

11.7 b) $x+1$ est négatif sur $[-2,-1]$ et positif sur $[-1,3]$. On en déduit : $\displaystyle\int_{-2}^3 |x+1|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} -x-1\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^3 x+1\,\mathrm{d}x.$ Ces deux intégrales se calculent avec des primitives ou en les interprétant comme des aires de triangles.

11.7 c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \max(1,\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \mathrm{d}x + \int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2.$

11.7 d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 3\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x - 2\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 3(\mathrm{e}-1)-2\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = 3\mathrm{e}-4.$

11.7 e) On calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2(x)-1)\sin(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{3}\Big[\cos^3(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

11.8) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.8 a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\arctan(x)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

11.8 b) $\displaystyle\int_0^2 10^x\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{e}^{x\ln 10}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\ln 10}\mathrm{e}^{x\ln 10}\right]_0^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\ln 10}-1}{\ln 10} = \frac{99}{\ln 10}.$

11.8 c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$

11.8 d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+(3x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{1}{3}\arctan(3x)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{3}\arctan(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{9}.$

Fiche nº 12. Intégration par parties

Réponses

12.1 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}-1}$

12.1 b) .... $\boxed{4}$

12.1 c) .... $\boxed{\dfrac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2\ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}}$

12.1 d) .... $\boxed{1}$

12.1 e) .... $\boxed{2\ln 2 - \dfrac{3}{4}}$

12.1 f) .... $\boxed{\ln(2) - 2 + \dfrac{\pi}{2}}$

12.1 g) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}}$

12.1 h) .... $\boxed{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{4}{3}}$

12.1 i) .... $\boxed{\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \dfrac{8}{9}\sqrt{2} + \dfrac{4}{9}}$

12.1 j) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi^2}{32}}$

12.2 a) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x+2)e^x \end{cases}}$

12.2 b) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\dfrac{1+\ln x}{x} \end{cases}}$

12.2 c) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{cases}}$

12.3 a) .... $\boxed{\dfrac{5}{2} - e^2}$

12.3 b) .... $\boxed{\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}}$

12.4 a) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x \end{cases}}$

12.4 b) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\left(\dfrac{1}{3}\ln^2 x - \dfrac{2}{9}\ln x + \dfrac{2}{27}\right) \end{cases}}$

Corrigés

12.1 a) On choisit $u'(t) = \cos t$ et $v(t) = t$. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt = [t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = \frac{\pi}{2} - 1$.

12.1 b) On choisit $v(t) = t$ et $u'(t) = e^{\frac{t}{2}}$. $\displaystyle\int_0^2 te^{\frac{t}{2}}\,dt = \left[2te^{\frac{t}{2}}\right]_0^2 - 2\int_0^2 e^{\frac{t}{2}}\,dt = 4e - 4\left[e^{\frac{t}{2}}\right]_0^2 = 4$.

12.1 c) On choisit $v(t) = t$ et $u'(t) = 2^t$. $\displaystyle\int_1^{\ln(2)} t2^t\,dt = \int_1^{\ln(2)} te^{t\ln(2)}\,dt = \left[t\frac{1}{\ln(2)}2^t\right]_1^{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)}\int_1^{\ln(2)} e^{t\ln(2)}\,dt =$ $\displaystyle 2^{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{(\ln(2))^2}[2^t]_1^{\ln(2)} = \frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2\ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}$.

12.1 d) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$. $\displaystyle\int_1^e \ln t\,dt = [t\ln t]_1^e - \int_1^e 1\,dt = e - (e-1) = 1$.

12.1 e) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln t$. $\displaystyle\int_1^2 t\ln t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}t\,dt = 2\ln 2 - \frac{1}{4}\left[t^2\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

12.1 f) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \ln(2) -$ $\displaystyle 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \ln 2 - 2[t - \arctan(t)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$.

12.1 g) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \arctan t$. On a

$$\int_0^1 t\arctan t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\arctan t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

12.1 h) On choisit $u'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ et $v(t) = t$. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = \left[2t\sqrt{1+t}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}$.

12.1 i) On choisit $u'(t) = \sqrt{1+t}$ et $v(t) = \ln(1+t)$. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\ln(1+t)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}(1+t))^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9}$.

12.1 j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\big(1+\tan^2 t\big)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,\mathrm{d}t$. On choisit dans la première intégrale, $v(t) = t$ et $u'(t) = 1+\tan^2 t$. On obtient $\displaystyle[t\tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t\,\mathrm{d}t - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + [\ln\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$.

12.2 a) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$, en choisissant $u'(t) = \mathrm{e}^t$ et $v(t) = -t+1$, on a $\displaystyle\int_0^x (-t+1)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[(-t+1)\mathrm{e}^t\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (-x+1)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 2$. Ainsi, $x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$.

12.2 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x > 0$, par intégration par parties avec $u'(t) = \dfrac{1}{t^2}$ et $v(t) = \ln t$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$. Ainsi, $x \mapsto -\dfrac{\ln x + 1}{x}$ est donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de f

12.2 c) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arctan t$, $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t = [t\arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. D'où une primitive.

12.3 a) On effectue deux intégrations par parties successives : pour la première, $u'(t) = \mathrm{e}^{2t}$ et $v(t) = t^2+3t-4$ et ainsi $\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[(t^2+3t-4)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t$. Puis, seconde intégration par parties avec, $v(t) = 2t+3$ et $u'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{2}$ d'où :$\displaystyle -\int_0^1 (2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t = 2 - \left[(2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{11}{4} - \frac{5}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{2t}\right]_0^1 = \frac{5}{2} - \mathrm{e}^2$.

12.3 b) On choisit d'abord $u' = \exp$ et $v = \sin$; d'où : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t$. Ensuite $u' = \exp$ et $v = \cos$, d'où : $\displaystyle\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\mathrm{e}^t\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t$. Finalement, $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1$.

12.4 a) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue. Soit $x > 0$, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln^2 t$ on obtient $\displaystyle\int_1^x \ln^2 t\,\mathrm{d}t = \left[t\ln^2 t\right]_1^x - \int_1^x 2\ln t\,\mathrm{d}t$. Puis, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$, on obtient $\displaystyle x\ln^2 x - 2[t\ln t]_1^x + 2\int_1^x 1\,\mathrm{d}t = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x - 2$. Ainsi, $x \mapsto x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \ln^2 x$.

12.4 b) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x > 0$, alors, avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln^2(t)$, on a : $\displaystyle\int_1^x t^2\ln^2 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\ln^2 t\right]_1^x - \frac{2}{3}\int_1^x t^2\ln t\,\mathrm{d}t$ puis avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln(t)$, on obtient $\displaystyle\frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{9}\left[t^3\ln t\right]_1^x + \frac{2}{9}\int_1^x t^2\,\mathrm{d}t = \frac{x^3\ln^2 x}{3} - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}(x^3-1)$. D'où une primitive.

Fiche n° 13. Changements de variable

Réponses

13.1 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

13.1 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

13.1 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

13.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{12}}$

13.1 e) .... $\boxed{2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}$

13.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}}$

13.2 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2e+1}{3}\right)}$

13.2 c) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

13.2 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}+\dfrac{\pi}{8}}$

13.2 e) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{12}}$

13.2 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}}$

13.3 a) .... $\boxed{2e^2}$

13.3 b) .... $\boxed{-2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1)-4+2\sqrt{3}}$

13.4 a) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x+\ln\tan(x)\end{array}\right.}$

13.4 b) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2}-\dfrac{e^{-2x}}{4}\end{array}\right.}$

13.4 c) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)\end{array}\right.}$

13.4 d) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}}+1)\end{array}\right.}$

13.4 e) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\sqrt{x^2-1}\end{array}\right.}$

Corrigés

13.1 a) On pose $t=\sin\theta$ avec $\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. On a $\dfrac{dt}{d\theta}=\cos\theta$ et donc

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2\theta)+1}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

....

13.1 b) On pose $u=\sqrt{t}$ avec $t\in[1,3]$, donc $t=u^2$ et $u\in\left[1,\sqrt{3}\right]$. On a $\dfrac{dt}{du}=2u$ et donc $dt=2udu$. Ainsi,

$$\int_1^3\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\,dt=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2u}{u+u^3}\,du=2\Big[\arctan u\Big]_1^{\sqrt{3}}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

....

13.1 c) On pose $u=\sin t$ avec $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. On a $\dfrac{du}{dt}=\cos t$ et donc $du=\cos t\,dt$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 u^3\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos t\,dt$.
Finalement, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos t\,dt=\left[\frac{1}{4}u^4\right]_0^1=\frac{1}{4}.$$

....

13.1 d) Remarquons qu'on a $\cos^3 t = (1-\sin^2 t)\cos t$. On pose $u = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \cos t$ donc $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 u^3(1-u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^3 t\,\mathrm{d}t$. Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^3 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{6}u^6\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

13.1 e) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1,4]$, donc $t = u^2$ et $u \in [1,2]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$.

Ainsi, $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{2u}{u^2+u}\,\mathrm{d}u = 2\int_1^2 \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\ln(1+u)\Big]_1^2 = 2(\ln(3)-\ln(2))$.

13.2 a) On pose $u = \cos t$ avec $t \in [0,\pi]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\sin t$. Ainsi, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{3+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ et finalement,

$\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

13.2 b) On pose $u = \mathrm{e}^t$ avec $t \in [0,1]$, donc $t = \ln u$ et $u \in [1,\mathrm{e}]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{u}$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2+\frac{1}{u}}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2u+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(2u+1)\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\mathrm{e}+1}{3}\right)$.

13.2 c) On pose $u = \dfrac{1}{2}t - 1$ avec $t \in [2,4]$, donc $t = 2u+2$ et $u \in [0,1]$. On a donc $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u$.

Ainsi, $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-4u^2}}\,\mathrm{d}u = \Big[\arcsin u\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

13.2 d) On pose $t = \tan u$ avec $u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = (1+\tan^2 u)$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2u)+1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.

13.2 e) On pose $u = \dfrac{1}{t}$ avec $t \in \left[\sqrt{2}, 2\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = -\dfrac{1}{u^2}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}}\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1u^2}}}\,\mathrm{d}u = -\Big[\arcsin u\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12}$.

13.2 f) On pose $u = \ln(t)$ avec $t \in [\mathrm{e},\ \mathrm{e}^2]$, donc $t = \mathrm{e}^u$ et $u \in [1,2]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \mathrm{e}^u$ et

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t+t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}.$$

13.3 a) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1,4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [1,2]$.

On a alors $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$ d'où $\displaystyle\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 2u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$. Cette nouvelle intégrale peut se calculer en faisant une intégration par parties. On trouve : $\displaystyle\int_1^2 2u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \Big[2u\mathrm{e}^u\Big]_1^2 - \int_1^2 2\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^2$.

13.3 b) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [3,4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [\sqrt{3},2]$.

On a alors $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$ d'où $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln\left(\sqrt{t}-1\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\ln(u-1)}{u}2u\,\mathrm{d}u = 2\int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u-1)\,\mathrm{d}u$.

On fait maintenant une intégration par parties :

$$2\int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u-1)\,\mathrm{d}u = 2\Big[(u-1)\ln(u-1)\Big]_{\sqrt{3}}^2 - 2\int_{\sqrt{3}}^2 \mathrm{d}u = -2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1) - 4 + 2\sqrt{3}.$$

13.4 a) La fonction est bien continue. Soit $(a,x) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[^2$.

On calcule $\displaystyle\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ qui est aussi $\displaystyle\int_a^x \frac{1 + \frac{\sin t}{\cos t}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \tan t$.

On a $\dfrac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ et, ainsi, $\displaystyle\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_{\tan a}^{\tan x} \left(1 + \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = \Big[u + \ln u\Big]_{\tan a}^{\tan x} = \tan x + \ln\tan(x) + C.$

....

13.4 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+\mathrm{th}(t)}\,\mathrm{d}t$ dans laquelle on pose $u = \mathrm{e}^t$ c'est-à-dire $t = \ln u$. On a donc $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{u}$ et ainsi

$$\int_0^x \frac{1}{1+\mathrm{th}(t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{1 + \frac{u - \frac{1}{u}}{u + \frac{1}{u}}}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{2u} + \frac{1}{2u^3}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{4}\frac{1}{u^2}\right]_1^{\mathrm{e}^x} = \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{4} + C.$$

....

13.4 c) La fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue.

Avec le changement de variable $u = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$, on a $t = \ln(1+u^2)$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

Soit $x > 0$. On a ainsi $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}} \frac{1}{u}\frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\arctan u\Big]_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} = 2\arctan(\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}) + C.$

....

13.4 d) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le changement de variable $u = \sqrt[3]{t}$ donne $t = u^3$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 3u^2$. Soit $x > 0$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t + \sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u^2}{u^3 + u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{3}{2}\ln(u^2+1)\right]_1^{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) + C.$$

....

13.4 e) La fonction est définie et continue sur $]1, +\infty[$.

Le changement de variable $u = \sqrt{t^2 - 1}$ donne $t = \sqrt{u^2+1}$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}}$. Soit $a > 1$ et $x > 1$. On a

$$\int_a^x t\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u\sqrt{u^2+1}}\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \arctan\sqrt{x^2-1} + C.$$

....

Fiche n° 14. Intégration des fractions rationnelles

Réponses

14.1 a) .... $\boxed{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

14.1 b) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)}$

14.2 a) .... $\boxed{2\ln\frac{9}{10}}$

14.2 b) .... $\boxed{\ln(a+1)}$

14.3 a) .... $\boxed{\ln\left(\frac{7}{3}\right)}$

14.3 b) .... $\boxed{\ln\frac{33}{28}}$

14.4 a) .... $\boxed{\ln\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}$

14.4 b) .... $\boxed{\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+1}{2}\right)}$

14.5 a) .... $\boxed{1 \text{ et } 2}$

14.5 b) ...... $\boxed{A=-1 \text{ et } B=1}$

14.5 c) .... $\boxed{2\ln\frac{4}{3}}$

14.6 a) .... $\boxed{\ln\frac{1}{3}}$

14.6 b) .... $\boxed{2\ln\frac{4}{3}}$

14.6 c) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}}$

14.6 d) .... $\boxed{\frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}}$

14.7 .... $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right)}$

14.8 a) .... $\boxed{\frac{a}{a^2+x^2}}$

14.8 b) .... $\boxed{\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}$

14.9 a) .... $\boxed{\frac{\pi}{4}}$

14.9 b) .... $\boxed{\frac{\pi}{6\sqrt{3}}}$

14.10 .... $\boxed{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$

Corrigés

14.1 a) La fonction $t \longmapsto 1/(t+1)$ est bien définie et continue sur $[1,2]$. Une primitive de cette fonction est la fonction $t \longmapsto \ln(t+1)$. D'où le calcul :

$$\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t+1)\Big]_1^2 = \ln(3)-\ln(2).$$

Enfin, on remarque que $\ln(3)-\ln(2) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

....

14.1 b) On procède comme précédemment mais on remarque qu'une primitive de $t \longmapsto 1/(2t+1)$ est $t \longmapsto \dfrac{\ln(2t+1)}{2}$: attention à ne pas oublier le facteur $1/2$! On calcule ensuite :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{2t+1}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{\ln(2t+1)}{2}\right]_1^2 \\ &= \frac{\ln(5)-\ln(3)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right).\end{aligned}$$

....

14.2 a) On commence par simplifier l'expression intégrée. Pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{t+\frac{1}{2}},$$

en multipliant « en haut et en bas » par 2. Donc, on a

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t &= 2\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\Big[\ln\big(t+\tfrac{1}{2}\big)\Big]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \\ &= 2\Big(\ln\frac{9}{16} - \ln\frac{5}{8}\Big) = 2\ln\frac{9\times 8}{5\times 16} = 2\ln\frac{9}{10}.\end{aligned}$$

Le résultat est < 0 puisque $9/10 < 1$.

C'est cohérent car on intègre une fonction $\geqslant 0$ entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{16}$, donc « à rebours ».

14.2 b) On calcule :

$$\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t+a)\Big]_0^{a^2} = \ln(a+a^2) - \ln(a) = \ln\big(a(a+1)\big) - \ln(a) = \ln(a+1).$$

14.3 a) On remarque que le numérateur est exactement la dérivée du dénominateur. On a donc

$$\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t^2+t+1)\Big]_1^2 = \ln(7)-\ln(3) = \ln\Big(\frac{7}{3}\Big).$$

14.3 b) On multiplie en haut et en bas par 2. On calcule :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2+\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\Big(t^2+\frac{2}{3}\Big)\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} &= \ln\frac{11}{12} - \ln\frac{7}{9} \\ &= \ln\Big(\frac{11\times 9}{12\times 7}\Big) = \ln\frac{33}{28}.\end{aligned}$$

14.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(t^2+\sqrt{2}t)\Big]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\big(\ln(4)-\ln(1+\sqrt{2})\big) \\ &= \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{4}{1+\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{4(\sqrt{2}-1)}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}\Big) = \frac{1}{2}\ln\big(4(\sqrt{2}-1)\big) \\ &= \ln\Big(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\Big).\end{aligned}$$

14.4 b) On force à apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur. On calcule :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{t}{at^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{2at}{at^2+1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2a}\Big[\ln(at^2+1)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \\ &= \frac{1}{2a}\big(\ln(a+1)-\ln(2)\big) = \frac{1}{2a}\ln\Big(\frac{a+1}{2}\Big).\end{aligned}$$

14.5 b) Supposons que A et B soient trouvés. En particulier, pour t convenable, on a

$$\frac{1}{t-2} = A + \frac{B(t-1)}{t-2}.$$

Cette égalité est encore valable pour $t=1$ (par exemple par continuité). En évaluant en $t=1$, on trouve $A=-1$.

De même, on trouve $B = 1$.

14.5 c) D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t &= 2\int_3^4 \frac{1}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t = 2\int_3^4 \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\Big[\ln(t-2) - \ln(t-1)\Big]_3^4 = 2\Big[\ln\Big(\frac{t-2}{t-1}\Big)\Big]_3^4 \\ &= 2\Big(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2}\Big) = 2\Big(\ln\frac{2}{3} + \ln(2)\Big) = 2\ln\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

14.6 a) Soit $t \in [0,1]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{t^2-4} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\Big).$$

Donc, on calcule

$$\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\Big)\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(2-t) - \ln(2+t)\Big]_0^1 = \Big[\ln\Big(\frac{2-t}{2+t}\Big)\Big]_0^1 = \ln\frac{1}{3}.$$

14.6 b) Soit $t \in [2,3]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{t^2-t} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}.$$

Donc, on calcule

$$\int_2^3 \frac{2}{t^2-t}\,\mathrm{d}t = 2\int_2^3 \Big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\Big)\,\mathrm{d}t = 2\Big[\ln(t-1) - \ln(t)\Big]_2^3 = 2\Big[\ln\Big(\frac{t-1}{t}\Big)\Big]_2^3 = 2\Big(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2}\Big) = 2\ln\frac{4}{3}.$$

14.6 c) Soit $t \in [0,1]$. Déjà, on a $t^2+4t+3=(t+1)(t+3)$ et

$$\frac{1}{(t+1)(t+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\right).$$

Donc, on calcule

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+3}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(t+1) - \ln(t+3)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{t+1}{t+3}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

14.6 d) Soit $t \in [0, \frac{1}{3}]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{4t^2-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\right).$$

Puis, on calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2-1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\Big[\ln(\tfrac{1}{2}-t) - \ln(t+\tfrac{1}{2})\Big]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{\frac{1}{2}-t}{t+\frac{1}{2}}\right)\right]_0^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1/6}{5/6}\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

14.7 Déjà, on remarque que, pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{t^2-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{a}} - \frac{1}{t+\sqrt{a}}\right).$$

Donc, on calcule

$$\int_0^a \frac{1}{t^2-a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{a}}\Big[\ln(\sqrt{a}-t) + \ln(t+\sqrt{a})\Big]_0^a = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{a}-t}{t+\sqrt{a}}\right)\right]_0^a = \frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right).$$

14.8 a) Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f'(x) = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2+x^2}.$$

14.8 b) D'après ce qui précède, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$ répond à la question.

14.9 a) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

14.9 b) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(0)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

14.10 On a

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-1}^{2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\big(\sqrt{2}\big) - \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\big(\sqrt{2}\big) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Or, on sait (c'est un exercice « classique ») que $\forall x > 0,\ \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Donc, on a

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Fiche n° 15. Systèmes linéaires

Réponses

15.1 a) .... $\boxed{\{(3,1)\}}$

15.1 b) .... $\boxed{\{(7,2)\}}$

15.1 c) .... $\boxed{\left\{(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\right\}}$

15.1 d) .... $\boxed{\left\{(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}}$

15.2 a) .... $\boxed{\left\{(1-\frac{a}{4},\frac{-1}{2}+\frac{3}{8}a)\right\}}$

15.2 b) .... $\boxed{(2,-3)}$

15.2 c) .... $\boxed{\left\{(\frac{1}{13}a+\frac{5}{13}a^2,\frac{2}{13}a-\frac{3}{13}a^2)\right\}}$

15.2 d) .... $\boxed{(a-2a^2,a+a^2)}$

15.3 a) .... $\boxed{\{(1+z,-z,z);z\in\mathbb{R}\}}$

15.3 b) .... $\boxed{\{(1,y,3+2y);y\in\mathbb{R}\}}$

15.3 c) .... $\boxed{\left\{(\frac{13}{6}-\frac{5}{3}z,-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}z,z);z\in\mathbb{R}\right\}}$

15.3 d) .... $\boxed{\left\{(x,\frac{-5}{12}-\frac{3}{2}x,\frac{-25}{24}-\frac{7}{4}x);x\in\mathbb{R}\right\}}$

15.4 a) .... $\boxed{\{(2,-1,3)\}}$

15.4 b) .... $\boxed{\{(-1,4,2)\}}$

15.4 c) .... $\boxed{\varnothing}$

15.4 d) .... $\boxed{\left\{(-\frac{2}{7}-z,\frac{-3}{7},z)\ ;\ z\in\mathbb{R}\right\}}$

15.5 a) .... $\boxed{\{(1,1/2,1/2)\}}$

15.5 b) .... $\boxed{\varnothing}$

15.5 c) .... $\boxed{\{(5z,1-4z,z)\ ;\ z\in\mathbb{R}\}}$

15.5 d) .... $\boxed{\left\{(1,\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2})\right\}}$

15.6 a) .... $\boxed{\{(5,3,-1)\}}$

15.6 b) .... $\boxed{\varnothing}$

15.6 c) .... $\boxed{\left\{(\frac{a^2+a-1}{a^3-1}c,\frac{a^2-a-1}{a^3-1}c,\frac{-a^2+a+1}{a^3-1}c)\right\}}$

15.7 a) .... $\boxed{\{(0,0,0)\}}$

15.7 b) .... $\boxed{\{(x,y,-x-y)\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}}$

15.7 c) .... $\boxed{\{(x,x,x)\ ;\ x\in\mathbb{R}\}}$

Corrigés

15.1 a) On calcule :

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+4y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ 3(1+2y)+4y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ 10y+3=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y=10 \\ x=1+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases}$$

15.1 b) On calcule : $\begin{cases} 2x+y=16 \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=16-2x \\ x-16+2x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=5+16=21 \\ y=16-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=16-14=2 \end{cases}$

15.1 c) On calcule : $\begin{cases} 3x-6y=-3 \\ 2x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-1 \\ x+y=1 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2y=-1 \\ 3y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{2}{3} \\ x=-1+2\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \end{cases}$

15.1 d) On calcule :

$$\begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2} \\ 6x+2y=3\sqrt{2} \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2} \\ 8y+2y=2\sqrt{2}+3\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2} \\ 10y=5\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3x=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x=\frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

15.2 a) On calcule : $\left\{\begin{array}{l} 3x+2y=2 \\ 2x+4y=a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=1-\dfrac{3}{2}x \\ 2x+4-6x=a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=1-\dfrac{3}{2}x \\ -4x=a-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-\dfrac{a}{4} \\ y=1-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{8}a=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{3}{8}a \end{array}\right.$

15.2 b) On calcule :

$$\left\{\begin{array}{l} x-ay=3a+2 \\ ax+y=2a-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=ay+3a+2 \\ a^2y+3a^2+2a+y=2a-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=ay+3a+2 \\ (a^2+1)y=2a-3-3a^2-2a \end{array}\right.$$

$$\underset{1+a^2\neq 0}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{-3-3a^2}{1+a^2}=-3 \\ x=-3a+3a+2=2 \end{array}\right.$$

15.2 c) On calcule :

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+5y=a \\ 2x-y=a^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x-a^2 \\ 3x+5\times(2x-a^2)=a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x-a^2 \\ 13x-5a^2=a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2 \\ y=2\times\left(\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2\right)-a^2=\dfrac{2}{13}a-\dfrac{3}{13}a^2 \end{array}\right.$$

15.2 d) On calcule :

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y=3a \\ 2x+3y=5a-a^2 \end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x+2y=3a \\ -y=5a-a^2-6a=-a^2-a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=a+a^2 \\ x=3a-2(a+a^2)=a-2a^2 \end{array}\right.$$

15.3 a) On calcule : $\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ 3x+y-2z=3 \end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ -5y-5z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-z \\ x-2z+z=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+z \\ y=-z \end{array}\right.$

15.3 b) On calcule : $\left\{\begin{array}{l} 3x-2y+z=6 \\ x+2y-z=-2 \end{array}\right. \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} 4x=4 \\ x+2y-z=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ 2y-z=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ z=2y+3 \end{array}\right.$

15.3 c) On calcule :

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+3z=\dfrac{5}{2} \\ x+2y-z=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x-y+3z=\dfrac{5}{2} \\ 3y-4z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z \\ x=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z-3z+\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z \\ x=\dfrac{13}{6}-\dfrac{5}{3}z \end{array}\right.$$

15.3 d) On calcule :

$$\left\{\begin{array}{l} 5x+y+2z=-\dfrac{5}{2} \\ 2x-y+2z=-\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-\dfrac{5}{2}-5x-2z \\ 2x+\dfrac{5}{2}+5x+2z+2z=-\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 7x+4z=-\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{-25}{6} \\ y=-\dfrac{5}{2}-5x-2z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{-25}{24}-\dfrac{7}{4}x \\ y=-\dfrac{5}{2}-5x+\dfrac{25}{12}+\dfrac{7}{2}x=\dfrac{-5}{12}-\dfrac{3}{2}x \end{array}\right.$$

15.4 a) On calcule :

$$\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y+2z=11 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1}}{\iff} \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ -5y+5z=20 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3-L_2}{\iff} \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ 2z=6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=3 \\ x+2y-3=-3 \\ -5y+3\times 3=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ x+2y=0 \\ -5y=14-9=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ y=-1 \\ x=-2y=2 \end{cases}$$

15.4 b) On calcule :

$$\begin{cases} a-b-c=-7 \\ 3a+2b-c=3 \\ 4a+b+2c=4 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-4L_1}}{\iff} \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 5b+6c=32 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3-L_2}{\iff} \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 4c=8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c=2 \\ a-b-2=-7 \\ 5b+2\times 2=24 \end{cases} \iff \begin{cases} c=2 \\ b=4 \\ a=-5+4=-1 \end{cases}$$

15.4 c) On calcule : $\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+10y+z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 7y=-1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{\iff} \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 0=-4 \end{cases}.$

Le système est incompatible car l'équation $0=-4$ n'a pas de solution.

15.4 d) On va extraire y de la deuxième équation, puis résoudre par substitution. On calcule :

$$\begin{cases} 3x+2y+3z=0 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 4x+5y+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ 3x+4x+4z+2+3z=0 \\ 4x+10x+10z+5+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ 7x+7z=-2 \\ 14x+14z=-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ x=-z-\dfrac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z-\dfrac{2}{7} \\ y=-2z-\dfrac{4}{7}+2z+1=\dfrac{3}{7} \end{cases}$$

15.5 a) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y=2 \\ 2x+2z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ 2-2y+y-z=1 \\ 4-4y+2z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ -y-z=-1 \\ -4y+2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ y=1-z \\ -4+4z+2z=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ y=1-z \\ 6z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3/6=1/2 \\ y=1-1/2=1/2 \\ x=2-1=1 \end{cases}$$

15.5 b) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y-2z=2 \\ 2x-2y+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ -4y+4z=1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+4L_2}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ 0=5 \end{cases}$$

Le système est incompatible car l'équation $0=5$ n'a pas de solution.

15.5 c) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 \\ y+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-4z \\ x=-(1-4z)+z+1=5z-1+1=5z \end{cases}.$$

15.5 d) On calcule :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (a-2)y+4z=1 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3+(2-a)L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (4+(2-a)(a+1))z=3-a \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (4+a+2-a^2)z=3-a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (-a^2+a+6)z=3-a \end{array}\right.$$

On factorise le trinôme $-(a^2-a-6)=-(a+2)(a-3)$ qui est non nul dans le cas étudié.

D'où : $\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (-a^2+a+6)z=3-a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{3-a}{-(a+2)(a-3)}=\dfrac{1}{a+2} \\ y=1-(a+1)\times\dfrac{1}{a+2} \\ x=1-y+z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{1}{a+2} \\ y=\dfrac{a+2-a-1}{a+2}=\dfrac{1}{a+2} \\ x=1-\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{a+2}=1 \end{array}\right.$

15.6 a) On calcule :

$$\left\{\begin{array}{l} x-2z=7 \\ 2x-y=7 \\ 2y-z=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7+2z \\ 14+4z-y=7 \\ 2y-z=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7+2z \\ y=7+4z \\ 14+8z-z=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7+2z \\ y=7+4z \\ 7z=-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-1 \\ y=7-4=3 \\ x=7-2=5 \end{array}\right.$$

15.6 b) On calcule :

$$\left\{\begin{array}{l} x-z=2 \\ x-y=2 \\ y-z=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2+z \\ 2+z-y=2 \\ y-z=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2+z \\ y=z \\ 0=2 \end{array}\right.$$

Le système est incompatible car l'équation $0=2$ n'a pas de solution.

15.6 c) On calcule :

$$\left\{\begin{array}{l} x-az=c \\ a\,x-y=c \\ a\,y-z=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=c+az \\ a(c+az)-y=c \\ a\,y-z=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ a(a-1)c+a^2z-z=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ a\big((a-1)c+a^2z\big)-z=c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ (a^3-1)z=(1+a-a^2)c \end{array}\right.$$

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $a^3-1=0$ a pour unique solution $a=1$ (fonction $t\mapsto t^3$ strictement croissante). Or $a\neq 1$, donc $a^3-1\neq 0$, on peut déterminer z dans la troisième équation.

$$\left\{\begin{array}{l} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ (a^3-1)z=(1+a-a^2)c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=c\dfrac{-a^2+a+1}{(a-1)(a^2+a+1}=\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c \\ y=(a-1)c+a^2\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c=\dfrac{a^2-a+1}{a^3-1}c \\ x=c+a\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c=\dfrac{a^2+a-1}{a^3-1}c \end{array}\right.$$

15.7 a) On calcule :

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+y+z=x \\ x+4y+z=y \\ x+y+4z=z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+y+z=0 \\ x+3y+z=0 \\ x+y+3z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-3x-y \\ x+3y-3x-y=0 \\ x+y+3\times(-3x-y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-3x-y \\ x=y \\ -10x=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=y=z=0$$

15.7 b) On calcule : $\begin{cases} 4x+y+z=3x \\ x+4y+z=3y \\ x+y+4z=3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow z=-x-y$

15.7 c) On calcule :

$$\begin{cases} 4x+y+z=6x \\ x+4y+z=6y \\ x+y+4z=6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x-y \\ x-2y+2x-y=0 \\ x+y-2\times(2x-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x-y \\ 3x-3y=0 \\ -3x+3y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=2x-x=x \end{cases}$$

Fiche n° 16. Nombres complexes

Réponses

16.1 a) .... $\boxed{4+32\mathrm{i}}$

16.1 b) .... $\boxed{13-\mathrm{i}}$

16.1 c) .... $\boxed{7-24\mathrm{i}}$

16.1 d) .... $\boxed{5}$

16.1 e) .. $\boxed{-119+120\mathrm{i}}$

16.1 f) ..... $\boxed{\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}}$

16.1 g) ..... $\boxed{\dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}}$

16.1 h) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$

16.2 a) .... $\boxed{12}$

16.2 b) .... $\boxed{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$

16.2 c) .... $\boxed{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

16.2 d) .... $\boxed{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

16.2 e) .... $\boxed{2e^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}}$

16.2 f) ..... $\boxed{5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

16.2 g) .... $\boxed{10\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}$

16.2 h) $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

16.3 a) .... $\boxed{1}$

16.3 b) ... $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

16.3 c) .. $\boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

Corrigés

16.1 a) On développe : $(2+6\mathrm{i})(5+\mathrm{i}) = 10+2\mathrm{i}+30\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2 = 10+32\mathrm{i}-6 = 4+32\mathrm{i}$.

16.1 b) On développe : $(3-\mathrm{i})(4+\mathrm{i}) = 12+3\mathrm{i}-4\mathrm{i}-\mathrm{i}^2 = 12-\mathrm{i}+1 = 13-\mathrm{i}$.

16.1 c) On développe : $(4-3\mathrm{i})^2 = 4^2-2\times 4\times 3\mathrm{i}+(3\mathrm{i})^2 = 16-24\mathrm{i}-9 = 7-24\mathrm{i}$

16.1 d) On développe : $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2-(2\mathrm{i})^2 = 1+4 = 5$.

Ou bien : en posant $z = 1-2\mathrm{i}$, on reconnaît la quantité $z\bar{z}$, c'est-à-dire $|z|^2$. Ainsi, $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2+2^2 = 5$.

16.1 e) On développe :

$(2-3\mathrm{i})^4 = \left((2-3\mathrm{i})^2\right)^2 = (4-2\times 2\times 3\mathrm{i}-9)^2 = (-5-12\mathrm{i})^2 = (5+12\mathrm{i})^2 = 5^2+2\times 5\times 12\mathrm{i}-12^2 = -119+120\mathrm{i}$.
Ou bien : avec la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(2-3\mathrm{i})^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}2^k(-3\mathrm{i})^{4-k}\\ &= (-3\mathrm{i})^4+4\times 2\times(-3\mathrm{i})^3+6\times 2^2\times(-3\mathrm{i})^2+4\times 2^3\times(-3\mathrm{i})+2^4\\ &= 81+216i-216-96\mathrm{i}+16 = -119+120\mathrm{i}.\end{aligned}$$

16.1 f) On utilise l'expression conjuguée : $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{3^2+1^2} = \dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}$

16.1 g) On utilise l'expression conjuguée et on développe :

$\dfrac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}} = \dfrac{(2-3\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}{(5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})} = \dfrac{10-4\mathrm{i}-15\mathrm{i}-6}{5^2+2^2} = \dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}$.

16.1 h) On utilise la définition de l'écriture exponentielle et la trigonométrie :

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

16.2 a) On a $|12| = 12$ et $\arg(12) = 0$, donc la réponse est 12 (ou $12\mathrm{e}^{0\mathrm{i}}$).

16.2 b) On a $|-8| = 8$ et $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

16.2 c) On a $|\sqrt{3}\mathrm{i}| = \sqrt{3}$ et $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

16.2 d) On a $|-2\mathrm{i}| = 2$ et $-\mathrm{i} = \overline{\mathrm{i}} = \overline{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$.

16.2 e) On écrit que $-2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et on utilise les propriétés de l'exponentielle :

$-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$.

16.2 f) On calcule $|5-5\mathrm{i}| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{2\times 5^2} = 5\sqrt{2}$ et on écrit

$5-5\mathrm{i} = 5\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

16.2 g) On calcule $|-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{25+75} = 10$ puis on écrit

$-5+5\mathrm{i}\sqrt{3} = 10\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$.

16.2 h) On écrit que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right| = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ $\left(\text{car } \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \geqslant 0 \text{ et } \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right| = 1\right)$ et $\arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right) = \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

On en déduit que l'écriture exponentielle de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ est $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

16.3 a) On remarque que le dénominateur de z est le conjugué du numérateur. Ainsi, $|z| = 1$.

16.3 b) De plus, en multipliant par le conjugué, on obtient

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})^2}{(1+\sqrt{2}-\mathrm{i})(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 + 2(1+\sqrt{2})\mathrm{i} - 1}{(1+\sqrt{2})^2+1} = \frac{1+2\sqrt{2}+2+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}-1}{1+2\sqrt{2}+2+1} \\ &= \frac{2+2\sqrt{2}+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}}{4+2\sqrt{2}} = \frac{2(1+\sqrt{2})(1+\mathrm{i})}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

16.3 c) Enfin, $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc $z^{2021} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{2021} = \mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi}$.

Comme $2021 = 4\times 505 + 1$, on a $\mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi + \frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Fiche n° 17. Trigonométrie et nombres complexes

Réponses

17.1 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\cos(3x) + \dfrac{3}{4}\cos(x)}$

17.1 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{4}\cos(4x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x) - \dfrac{1}{4}}$

17.1 c) ... $\boxed{-\dfrac{1}{8}\cos(6x) + \dfrac{1}{4}\cos(4x) - \dfrac{3}{8}\cos(2x) + \dfrac{1}{4}}$

17.1 d) ... $\boxed{-\dfrac{\sin(9x)}{8} + \dfrac{3\sin(5x)}{8} - \dfrac{\sin(3x)}{8} - \dfrac{3\sin(x)}{8}}$

17.1 e) .... $\boxed{\dfrac{\cos(9x)}{8} + \dfrac{3\cos(5x)}{8} + \dfrac{\cos(3x)}{8} + \dfrac{3\cos(x)}{8}}$

17.1 f) .... $\boxed{-\dfrac{1}{4}\sin(11x) + \dfrac{1}{4}\sin(5x) + \dfrac{1}{2}\sin(3x)}$

17.2 a) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}}$

17.2 b) .... $\boxed{\left(-2\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}}$

17.2 c) .... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{-7\mathrm{i}\pi}{12}}}$

17.2 d) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}}$

17.2 e) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}}$

17.2 f) .... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}}}$

17.2 g) .... $\boxed{\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}\mathrm{e}^{\frac{13\mathrm{i}\pi}{24}}}$

17.2 h) .... $\boxed{2^{27}\cos^{27}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

17.3 a) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}}$

17.3 b) .... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}}$

17.4 a) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}}$

17.4 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi}-2)}$

Corrigés

17.1 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right) = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right) + \frac{3}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\\ &= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x.\end{aligned}$$

17.1 b) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(2x)\sin^2(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2 = -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)\\ &= -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}-2\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)+2\right) = -\frac{1}{4}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

17.1 c) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos^2(2x)\sin^2(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2}\right)^2\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2 = -\frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+2+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)\\ &= -\frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x}-2\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-4+2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}-2\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\right)\\ &= -\frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}-2(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x})+3(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})-4\right) = -\frac{1}{8}\cos(6x)+\frac{1}{4}\cos(4x)-\frac{3}{8}\cos(2x)+\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

17.1 d) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x)\sin^3(2x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = -\frac{1}{16\mathrm{i}}\big(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\big)\big(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x}-3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\big)\\ &= -\frac{1}{16\mathrm{i}}\big(\mathrm{e}^{9\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-9\mathrm{i}x}-3(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x})+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}+3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\big)\\ &= -\frac{1}{8}\sin(9x)+\frac{3}{8}\sin(5x)-\frac{1}{8}\sin(3x)-\frac{3}{8}\sin(x).\end{aligned}$$

17.2 a) $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{12}}+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}.$

17.2 b) $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}+\mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}_{<0}\mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}.$

17.2 c) $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}-1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\big) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\left(-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{-\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}.$

17.2 d) $1+\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}$

17.2 e) $-1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\big) = \underbrace{-2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{<0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\pi} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}.$

17.2 f) $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{24}}\left(-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{24}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}}.$

17.2 g) On fait le quotient de a) et f).

17.2 h) $\big(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\big)^{27} = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^{27} = 2^{27}\cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$

17.3 a) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}.$

17.3 b) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{i}\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \underbrace{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}.$

17.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \mathrm{e}^x\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \mathrm{Im}(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^\pi \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}}\right]_0^\pi\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pi+\mathrm{i}\pi}-1}{1+\mathrm{i}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-\mathrm{e}^\pi-1}{1+\mathrm{i}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{(-\mathrm{e}^\pi-1)(1-\mathrm{i})}{2}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^\pi+1}{2}.\end{aligned}$$

Fiche n° 18. Sommes et produits

Réponses

18.1 a) $n(n+2)$

18.1 b) $\dfrac{7(n+1)(n+4)}{2}$

18.1 c) $\dfrac{n(5n+1)}{2}$

18.1 d) $\dfrac{(n-2)(n-7)}{6}$

18.2 a) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

18.2 b) $n(n+1)(n^2+n+4)$

18.2 c) $\dfrac{9}{2}(3^{n-2}-1)$

18.2 d) $5^{n+1}\dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}$

18.2 e) $\dfrac{7}{6}(7^n-1)+n(n+4)$

18.2 f) $\dfrac{n+1}{2n}$

18.3 a) 2^{q-p+1}

18.3 b) $3^{\frac{n(n+1)}{2}}$

18.3 c) $5^n(n!)^{\frac{3}{2}}$

18.3 d) 0

18.4 a) $\dfrac{n(n+1)}{2}$

18.4 b) 0

18.4 c) $n2^{n+1}+2(1-2^n)$

18.4 d) $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

18.5 a) $(n+2)^3-2^3$

18.5 b) $\ln(n+1)$

18.5 c) $1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

18.5 d) $(n+1)!-1$

18.6 a) $n+1$

18.6 b) $1-4n^2$

18.6 c) $\dfrac{1}{n}$

18.6 d) $\dfrac{n+1}{2n}$

18.7 a) $1-\dfrac{1}{n+1}$

18.7 b) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+3}$

18.8 a) $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$

18.8 b) $\dfrac{n(n+3)}{4}$

18.8 c) $\dfrac{n(n^2-1)}{2}$

18.8 d) $\dfrac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}$

18.8 e) $\dfrac{n(n+1)}{2}\ln(n!)$

18.8 f) $\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

Corrigés

18.1 a) On utilise la formule suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n = n\sum_{k=1}^{n+2} 1 = (n+2-1+1)\times n = n(n+2)$.

18.1 b) On utilise la formule présente en prérequis : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k = 7\times\frac{(n+2-2+1)(n+2+2)}{2} = \frac{7(n+1)(n+4)}{2}$.

18.1 c) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+n-1) = 3\sum_{k=1}^{n}k+(n-1)\sum_{k=1}^{n}1 = \frac{3n(n+1)}{2}+n(n-1) = \frac{n(5n+1)}{2}.$$

18.1 d) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{k-4}{3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n-1}(k-4) = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=2}^{n-1}k - 4\sum_{k=2}^{n-1}1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{(n-2)(n+1)}{2}-4(n-2)\right) = \frac{(n-2)(n-7)}{6}.$$

18.2 a) On développe et utilise la linéarité de la somme $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$.

Puis, on utilise la formule suivante : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. D'où $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

18.2 b) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} \big(4k(k^2+2)\big) = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 8\sum_{k=0}^{n} k = 4\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 8\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)(n(n+1)+4) = n(n+1)(n^2+n+4).$$

18.2 c) On utilise la formule pour les sommes géométriques : on a $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k = 3^2 \frac{1-3^{n-1-2+1}}{1-3} = \frac{9}{2}(3^{n-2}-1)$.

18.2 d) On factorise pour faire apparaître une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k} = 5^n \sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{-k} = 5^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^k = 5^n \frac{1-(\frac{2}{5})^{n-0+1}}{1-\frac{2}{5}} = 5^{n+1}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}.$$

18.2 e) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} (7^k + 4k - n + 2) = \sum_{k=1}^{n} 7^k + 4\sum_{k=1}^{n} k + (-n+2)\sum_{k=1}^{n} 1 = 7\frac{7^n-1}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + (-n+2)n = \frac{7}{6}(7^n-1) + n + 4.$$

18.2 f) On utilise la formule suivante : $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2n}$.

18.3 a) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=p}^{q} 2 = 2 \times \cdots \times 2 = 2^{q-p+1}$.

18.3 b) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=1}^{n} 3^k = 3^1 \times 3^2 \times \cdots \times 3^n = 3^{1+\cdots+n} = 3^{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

18.3 c) On factorise et on utilise que $\sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}}$: on a

$$\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k} \times k = 5^n \prod_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{2}} = 5^n \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{\frac{3}{2}} = 5^n (n!)^{\frac{3}{2}}.$$

18.3 d) Un produit est nul si l'un des termes est nul.

18.4 a) Avec ce changement ou renversement, on a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a $\sum_{k=1}^{n} n+1-k = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

18.4 b) On utilise la linéarité de la somme et on effectue ce changement ou renversement dans la seconde. On a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

18.4 c) Avec le changement d'indice, on a, en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)2^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} j2^{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2\sum_{j=0}^{n-1} j2^j + 2\sum_{j=0}^{n-1} 2^j \\ &= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j2^j - n2^n\right] + 2\frac{1-2^n}{1-2} = 2S_n - n2^{n+1} - 2(1-2^n) \end{aligned}$$

D'où $S_n = n2^{n+1} + 2(1-2^n) = (n-1)2^{n+1} + 2$.

18.4 d) On a $\sum_{k=3}^{n+2}(k-2)^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

18.5 a) On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=2}^{n+2}(k+1)^3 - k^3 = 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \cdots + (n+3)^3 - (n+2)^3 = (n+3)^3 - 2^3.$$

18.5 b) On calcule :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(2) + \cdots + \ln(n+1) - [\ln(1) + \cdots + \ln(n)] = \ln(n+1).$$

18.5 c) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+1-1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

18.5 d) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)\times k! - k!] = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1.$$

18.6 a) On écrit $\prod_{k=1}^{n} \dfrac{k+1}{k} = \dfrac{2}{1} \times \dfrac{3}{2} \times \cdots \times \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{n+1}{1} = n+1.$

18.6 b) Dans cet exemple, il faut aller un terme plus loin pour voir le télescopage :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-3} &= \frac{3}{-1} \times \frac{5}{1} \times \frac{7}{3} \times \cdots \times \frac{2(n-1)+1}{2(n-1)-3} \times \frac{2n+1}{2n-3} \\ &= \frac{2(n-1)+1}{-1} \times \frac{2n+1}{1} = -(2n-2+1)(2n+1) = -(2n-1)(2n+1) = 1-4n^2. \end{aligned}$$

18.6 c) En mettant au même dénominateur : $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\dfrac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\dfrac{k-1}{k}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \cdots \times \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{1}{n}.$

18.6 d) Il faut remarquer l'identité remarquable et faire deux produits télescopiques :

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} = \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\right) \times \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}\right) \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

18.7 a) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, en reconnaissant une somme télescopique.

18.7 b) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{1}{(k+2)(k+3)} = \dfrac{a}{k+2} + \dfrac{b}{k+3}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}$, en reconnaissant une somme télescopique.

18.8 a) Comme il n'y a que l'indice j dans la somme, nous pouvons factoriser :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{n(n+1)}{2} n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

18.8 b) On somme d'abord sur l'indice i ; on calcule donc

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Signalons, qu'en revanche, l'autre ordre de sommation ne permettait pas de conclure.

18.8 c) Il faut faire attention à l'inégalité stricte :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j) &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(i+j) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j\right) = \sum_{j=2}^{n}\left[\frac{j(j-1)}{2} + j(j-1)\right] \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left[\frac{3}{2}(j^2-j)\right] = \frac{3}{2}\left(\sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j^2\right) = \frac{3}{2}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right) - 1 - \left(\sum_{j=1}^{n} j\right) + 1\right] \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{3n(n+1)(2n+1-3)}{3\times 2\times 2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{2}.
\end{aligned}$$

18.8 d) On développe d'abord puis on choisit l'ordre de sommation qui semble faciliter les calculs :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)^2 &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i^2+2ij+j^2) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i^2 + 2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} i^2\right) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} ij\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} j^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2\sum_{j=i}^{n} 1\right) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j} i\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(j^2\sum_{i=1}^{j} 1\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2(n-i+1) + 2\sum_{j=1}^{n} j\frac{j(j+1)}{2} + \sum_{j=1}^{n} j^3 = \sum_{i=1}^{n}\left[i^2(n+1) - i^3\right] + \sum_{j=1}^{n}(j^3+j^2) + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= (n+2)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}.
\end{aligned}$$

18.8 e) On calcule :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \ln(i^j) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j\ln(i) = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \ln(i)\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln(n!).$$

18.8 f) On fait une sommation par paquets :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \max(i,j) + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} \max(i,j) + \sum_{1\leqslant j=i\leqslant n} \max(i,j) \\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} i + \sum_{i=1}^{n} i \\
&= 2\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{par symétrie} \\
&= 2\sum_{j=2}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} = 2\sum_{j=1}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j\right] + \frac{n(n+1)}{2} = 2\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{6}(4n+2-6+3) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Fiche n° 19. Coefficients binomiaux

Réponses

19.1 a) .... $\boxed{10\,100}$

19.1 b) .... $\boxed{720}$

19.1 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{30}}$

19.1 d) .... $\boxed{15}$

19.1 e) .... $\boxed{56}$

19.1 f) .... $\boxed{140}$

19.2 a) .... $\boxed{\dfrac{9!}{5!}}$

19.2 b) .... $\boxed{\dbinom{9}{4}}$

19.2 c) .... $\boxed{2^n \times n!}$

19.2 d) .... $\boxed{\dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}}$

19.3 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

19.3 b) .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

19.3 c) .... $\boxed{\dfrac{k+1}{n-k}}$

19.3 d) .... $\boxed{(n+2)(n+1)}$

19.3 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{(n+1)!}}$

19.3 f) .... $\boxed{\dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}}$

19.4 a) .... $\boxed{\dfrac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}}$

19.4 b) .... $\boxed{\dfrac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}}$

19.5 a) .... $\boxed{3^n}$

19.5 b) .... $\boxed{0}$

19.5 c) .... $\boxed{6^n}$

19.5 d) .... $\boxed{12 \times 15^n}$

19.6 a) .... $\boxed{2 \times \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \dbinom{n}{2p}}$

19.6 b) .... $\boxed{2^{n-1}}$

19.7 a) .... $\boxed{2^n}$

19.7 b) .... $\boxed{n2^{n-1}}$

19.7 c) .... $\boxed{n(n+1)2^{n-2}}$

19.7 d) .... $\boxed{\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}}$

Corrigés

19.1 a) On calcule : $\dfrac{101!}{99!} = \dfrac{101 \times 100!}{99!} = \dfrac{101 \times 100 \times 99!}{99!} = 101 \times 100 = 10100.$

19.1 b) On calcule : $\dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720.$

19.1 c) On calcule : $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5}{5 \times 4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5-1}{5!} = \dfrac{4}{5!} = \dfrac{4}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = \dfrac{1}{30}.$

19.1 d) On calcule : $\dbinom{6}{2} = \dfrac{6!}{2! \times 4!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15.$

19.1 e) On calcule : $\dbinom{8}{3} = \dfrac{8!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{2 \times 3} = 8 \times 7 = 56.$

19.1 f) On calcule : $4 \times \dbinom{7}{4} = 4 \times \dfrac{7!}{4! \times 3!} = \dfrac{4 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{4 \times 3! \times 3!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 3} = 140.$

19.2 a) Par définition, $9! = (2 \times 3 \times 4 \times 5) \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 5! \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$. Donc, $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$.

19.2 b) Comme pour le calcul précédent, on a $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$. Or, $2 \times 3 \times 4 = 4!$. Ainsi,

$$\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4} = \frac{9!}{5!} \times \frac{1}{4!} = \binom{9}{4} = \binom{9}{5}.$$

19.2 c) On peut mettre 2 en facteur de chaque nombre du produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$, produit qui contient n facteurs. Ainsi,

$$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n) = 2^n \times n!.$$

....

19.2 d) On multiplie le produit $3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)$ par le produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$ de la question précédente.

On obtient ainsi le produit de tous les entiers compris entre 2 et $(2n+1)$. Il s'agit donc de $(2n+1)!$.

Donc, on a

$$3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}.$$

....

19.3 a) Par définition, $\displaystyle\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

....

19.3 b) Par définition, $\displaystyle\binom{n}{3} = \frac{n!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

....

19.3 c) On calcule

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{\frac{n!}{k! \times (n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)! \times (n-(k+1))!}} &= \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \times \frac{(k+1)! \times (n-(k+1))!}{n!} \\ &= \frac{(k+1) \times k! \times (n-k-1)!}{k! \times (n-k) \times (n-k-1)!} = \frac{k+1}{n-k}.\end{aligned}$$

....

19.3 d) On calcule $\displaystyle\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2) \times (n+1) \times n!}{n!} = (n+2)(n+1)$.

....

19.3 e) On réduit au même dénominateur $\displaystyle\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1) \times n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$.

....

19.3 f) On réduit au même dénominateur

$$\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} = \frac{(n+1)!}{2^{2n+2}} - \frac{2^2 \times n!}{2^2 \times 2^{2n}} = \frac{(n+1)! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{(n+1) \times n! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}.$$

....

19.4 a) On met chaque terme au même dénominateur, à savoir $2n(n+2)!$) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!} &= \frac{2n(n+1)(n+2)}{n! \times 2n(n+1)(n+2)} \\ \frac{1}{2n \times (n+1)!} &= \frac{n+2}{2n \times (n+1)! \times (n+2)} \\ \text{et} \quad \frac{1}{2 \times (n+2)!} &= \frac{n}{2 \times (n+2)! \times n}.\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} &= \frac{2n(n+1)(n+2) + n + 2 + n}{2n \times (n+2)!} \\ &= \frac{2(n+1)(n(n+2)+1)}{2n \times (n+2)!} = \frac{(n+1)(n^2+2n+1)}{n(n+2)!}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} = \frac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}.$$

....

19.4 b) On a
$$\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)}\times((n+1)!)^3}\div\frac{(3n)!}{a^{3n}\times(n!)^3}=\frac{(3n+3)!}{a^{3n+3}\times((n+1)!)^3}\times\frac{a^{3n}\times(n!)^3}{(3n)!}.$$
Or,
$$\begin{aligned}(3n+3)! &= (3n+3)\times(3n+2)\times(3n+1)\times(3n)!\\ a^{3n+3} &= a^{3n}\times a^3\\ ((n+1)!)^3 &= ((n+1)\times n!)^3=(n+1)^3\times(n!)^3.\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)}\times((n+1)!)^3}\div\frac{(3n)!}{a^{3n}\times(n!)^3} &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{a^3\times(n+1)^3}\\ &= \frac{3(n+1)(3n+2)(3n+1)}{a^3\times(n+1)^3}=\frac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}.\end{aligned}$$

19.5 a) On constate que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\times1^{n-k}=(2+1)^n=3^n$.

19.5 b) On constate que
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)\times\binom{n}{k}(-1)^k\times1^{n-k}=-1\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\times1^{n-k}=(-1)\times(-1+1)^n=0.$$

19.5 c) On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{2n-k}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}2^n\times2^{n-k}\binom{n}{k}=2^n\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\times1^k=2^n\times(1+2)^n=2^n\times3^n=6^n$.

19.5 d) On calcule
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}2^{k+2}\binom{n}{k}\times3^{2n-k+1} &= \sum_{k=0}^{n}2^2\times2^k\times\binom{n}{k}\times3^{n+1}\times3^{n-k}\\ &= 4\times3^{n+1}\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\times3^{n-k}\\ &= 4\times3^{n+1}\times(2+3)^n=4\times3^{n+1}\times5^n=4\times3\times3^n\times5^n=12\times15^n.\end{aligned}$$

19.6 a) On développe $\displaystyle(1+1)^n+(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+(-1)^k)$.

Or, $1+(-1)^k=2$ si k est pair et $1+(-1)^k=0$ si k est impair. Ainsi, on notant $P=\{k\in\mathbb{N},\ 0\leqslant k\leqslant n \text{ et } k \text{ pair}\}$, on a
$$(1+1)^n+(1-1)^n=\sum_{k\in P}\binom{n}{k}\times2=2\times\sum_{k\in P}\binom{n}{k}.$$
Or, si $k\in P$, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $k=2p$. Comme $0\leqslant k\leqslant n$, on a alors $0\leqslant 2p\leqslant n$ et donc $0\leqslant p\leqslant\frac{n}{2}$.

Comme $p\in\mathbb{N}$, on peut aussi écrire $0\leqslant p\leqslant\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$.

Ainsi,
$$\sum_{k\in P}\binom{n}{k}=\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2p}\quad\text{et}\quad(1+1)^n+(1-1)^n=2\times\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2p}.$$

19.6 b) On déduit de la première question que $\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2p}=\frac{1}{2}((1+1)^n+(1-1)^n)=2^{n-1}$.

19.7 a) On développe $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. On évalue en $x = 1$ pour obtenir $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

....

19.7 b) On dérive par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k \times x^{k-1}$.

On évalue en $x = 1$ pour obtenir $n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k = n2^{n-1}$.

....

19.7 c) On dérive deux fois par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) \times x^{k-2}$.

On évalue en $x = 1$ pour obtenir $n(n-1)(1+1)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1)$. Ainsi, $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = n(n-1)2^{n-2}$.

Or, par linéarité, on a $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

....

19.7 d) On intègre entre 0 et x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. On obtient

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

On évalue en $x = 1$ pour obtenir

$$\frac{1}{n+1}(1+1)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

....

Fiche n° 20. Manipulation des fonctions usuelles

Réponses

20.1 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

20.1 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

20.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

20.2 b) .... $\boxed{1}$

20.2 c) .... $\boxed{-\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}}$

20.2 d)............... $\boxed{\dfrac{\ln(4)}{\ln(20/3)}}$

20.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}}$

20.3 b) .... $\boxed{\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}}$

20.3 c) .... $\boxed{1-\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

20.3 d) .... $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}}$

20.4 a) ... $\boxed{x\mapsto \ln(2)\times 2^x+2x}$

20.4 b). $\boxed{x\mapsto \dfrac{15^x\ln(3/5)+3^x\ln(3)}{(5^x+1)^2}}$

20.4 c)..... $\boxed{x\mapsto (\ln(x)+1)x^x}$

20.5 a) .... $\boxed{x\mapsto 0}$

Corrigés

20.1 a) On remarque que $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\arctan\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

....

20.2 a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $3^x=\dfrac{9^x}{2}\Leftrightarrow \ln(3^x)=\ln\left(\dfrac{9^x}{2}\right)\Leftrightarrow x\ln(3)=2x\ln(3)-\ln(2)\Leftrightarrow x=\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

....

20.2 b) Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $4^x=2\times 2^x\Leftrightarrow 2x\ln(2)=(x+1)\ln(2)\Leftrightarrow 2x=x+1\Leftrightarrow x=1$.

....

20.2 c) Soit $x\in\mathbb{R}$.

Alors on a l'équivalence $2^x=3.4^x\Leftrightarrow x\ln(2)=\ln(3)+2x\ln(2)\Leftrightarrow x=-\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

....

20.2 d) Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}10^{2x}=4\times 5^x\times 9^{\frac{x}{2}}&\Leftrightarrow \ln(10^{2x})=\ln(4\times 5^x\times 9^{\frac{x}{2}})\Leftrightarrow 2x\ln(10)=\ln(4)+x\ln(5)+\frac{x}{2}\ln(9)\\&\Leftrightarrow x\left(2\ln(5)+2\ln(2)-\ln(5)-\frac{2\ln(3)}{2}\right)=\ln(4)\Leftrightarrow x=\frac{\ln(4)}{2\ln(2)+\ln(5)-\ln(3)}=\frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}.\end{aligned}$$

....

20.3 a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Posons $X=2^x$. Alors $2^x+4^x=4\Leftrightarrow X+X^2-4=0$. Cette équation a pour discriminant $1+16=17$, d'où deux racines, $\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. Seule la racine $\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$ est positive, donc $2^x+4^x=4\Leftrightarrow 2^x=\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\Leftrightarrow$ $x\ln(2)=\ln\left(\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\right)\Leftrightarrow x=\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$.

....

20.3 b) Soit $x\in\mathbb{R}$. Notons $X=4^x$. Alors $16^x-3\times 4^x+2=0\Leftrightarrow X^2-3X+2=0\Leftrightarrow (X-1)(X-2)=0\Leftrightarrow 4^x=1$ ou $4^x=2\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\dfrac{1}{2}$.

....

20.3 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.

Alors on a l'équivalence $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 3 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 \times 2 \times 3 = 25$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{1 \pm 5}{4}$, i.e. $\dfrac{3}{2}$ et -1. La seule solution positive est $\dfrac{3}{2}$, donc $2 \times 9^x - 3^x - 3 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x \ln(3) = \ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

....

20.3 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.

Alors on a l'équivalence $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 = 5$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{-1 \pm 5}{2}$. La seule solution positive est $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$, donc $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \Leftrightarrow x \ln(3) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$.

....

20.4 a) On n'oublie pas que $2^x = \mathrm{e}^{x \ln(2)}$. Donc la dérivée de $x \mapsto 2^x$ est $x \mapsto \ln(2).2^x$.

....

20.4 c) On écrit que $x^x = \mathrm{e}^{x \ln(x)}$. Ainsi la dérivée de la fonction est $x \mapsto (\ln(x) + 1)\mathrm{e}^{x \ln(x)}$.

....

20.5 a) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2} + \dfrac{-1}{x^2} \dfrac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{1}{1 + x^2} - \dfrac{1}{x^2 + 1} = 0$.

....

Fiche n° 21. Suites numériques

Réponses

21.1 a) $\boxed{\dfrac{12}{5}}$

21.1 b) $\boxed{8}$

21.1 c) $\boxed{\dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}}$

21.1 d) $\boxed{\dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}}$

21.2 a) $\boxed{13}$

21.2 b) $\boxed{29}$

21.3 a) $\boxed{2^{\frac{1}{8}}}$

21.3 b) $\boxed{2^{\frac{1}{64}}}$

21.4 a) $\boxed{2}$

21.4 b) $\boxed{2}$

21.5 a) $\boxed{2n\ln(n)}$

21.5 b) $\boxed{4n\ln(2n)}$

21.6 a) $\boxed{21}$

21.6 b) $\boxed{10\ 000}$

21.6 c) $\boxed{2\ 001}$

21.6 d) $\boxed{10\ 201}$

21.7 a) $\boxed{\dfrac{17}{24}}$

21.7 b) $\boxed{\dfrac{1}{24}}$

21.8 a) $\boxed{\dfrac{3}{512}}$

21.8 b) $\boxed{\dfrac{3069}{512}}$

21.8 c) $\boxed{\dfrac{3}{1\ 024}}$

21.8 d) $\boxed{\dfrac{6141}{1024}}$

21.9 a) $\boxed{\dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}}$

21.9 b) $\boxed{\dfrac{11\sqrt{5}}{25}}$

21.10 a) $\boxed{3^n+(-2)^n}$

21.10 b) $\boxed{211}$

21.11 a) $\boxed{\dfrac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2}}$

21.11 b) $\boxed{2\sqrt{2}}$

21.12 a) $\boxed{257}$

21.12 b) $\boxed{65\ 537}$

21.12 c) $\boxed{F_n}$

21.12 d) $\boxed{F_{n+1}-2}$

21.12 e) $\boxed{F_{n+1}+2^{2^n+1}}$

21.12 f) $\boxed{F_{n+2}}$

Corrigés

21.1 a) $u_0 = \dfrac{2\times 0+3}{5}\times 2^{0+2} = \dfrac{12}{5}$.

21.1 b) $u_1 = \dfrac{2\times 1+3}{5}\times 2^{1+2} = \dfrac{5}{5}\times 8 = 8$.

21.1 c) $u_n = \dfrac{2(n+1)+3}{5}\times 2^{(n+1)+2} = \dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}$.

21.1 d) $u_{3n} = \dfrac{2\times 3n+3}{5}\times 2^{3n+2} = \dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}$

21.2 a) $u_1 = 2\times 1+3 = 5$ et $u_2 = 2\times 5+3 = 13$.

21.2 b) On calcule : $u_3 = 2\times 13+3 = 29$.

21.3 a) $v_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^3}} = 2^{\frac{1}{8}}$.

21.3 b) $v_6 = 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = 2^{\frac{1}{2^6}} = 2^{\frac{1}{64}}$.

21.4 a) $w_1 = \dfrac{1}{2}\times 2^2 = \dfrac{4}{2} = 2$ et, de même, $w_2 = 2$.

21.4 b) Il faudrait formaliser une preuve par récurrence.

21.5 a) $t_{2n} = \ln((2n)^{2n}) - \ln(2^{2n}) = 2n\ln(2) + 2n\ln(n) - 2n\ln(2) = 2n\ln(n)$.

21.5 b) $t_{4n} = \ln((4n)^{4n}) - \ln(2^{4n}) = 8n\ln(2) + 4n\ln(n) - 4n\ln(2) = 4n\ln(2) + 4n\ln(n) = 4n\ln(2n)$.

21.6 a) $a_{100} = a_0 + 100 \times 2 = 201$.

21.6 b) $s_{100} = \dfrac{100 \times (1 + 199)}{2} = \dfrac{100 \times 200}{2} = 100^2 = 10\ 000$.

21.6 c) $a_{1\ 000} = 1 + 1\ 000 \times 2 = 2\ 001$.

21.6 d) $s_{101} = \dfrac{101 \times (1 + 201)}{2} = \dfrac{101 \times 202}{2} = 101^2 = 10\ 201$.

21.7 a) $b_{102} = \dfrac{b_{101} + b_{103}}{2} = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{2} = \dfrac{\frac{8+9}{12}}{2} = \dfrac{17}{24}$.

21.7 b) $r = u_{102} - u_{101} = \dfrac{17}{24} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{24}$.

21.8 a) $g_9 = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = \dfrac{3}{2^9} = \dfrac{3}{512}$.

21.8 b) $\sigma_{10} = g_0 \times \dfrac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} = 6\dfrac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \dfrac{3 \times 1\ 023}{512} = \dfrac{3069}{512}$.

21.8 c) $g_{10} = g_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = 3 \times \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{3}{1\ 024}$.

21.8 d) $\sigma_{11} = 6\dfrac{2^{11} - 1}{2^{11}} = \dfrac{3 \times 2\ 047}{1\ 024} = \dfrac{6141}{1024}$.

21.9 a) $h_{12} = \sqrt{h_{11} \times h_{13}} = \sqrt{\dfrac{5\pi \times 11\pi}{11 \times 25}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{5}} = \dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}$.

21.9 b) $r = \dfrac{h_{12}}{h_{11}} = \dfrac{\frac{\pi\sqrt{5}}{5}}{\frac{5\pi}{11}} = \dfrac{\pi\sqrt{5} \times 11}{5 \times 5\pi} = \dfrac{11\sqrt{5}}{25}$.

21.10 a) L'équation caractéristique est $r^2 - r - 6 = 0$ dont les racines sont 3 et -2. Ainsi $u_n = \alpha 3^n + \beta(-2)^n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales conduisent au système linéaire $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha - 2\beta = 1 \end{cases}$ dont les solutions sont $\alpha = \beta = 1$.

21.10 b) D'après le a) : $u_5 = 3^5 + (-2)^5 = 3^5 - 2^5 = 211$.

21.11 a) L'équation caractéristique est ici $r^2 - 2r - 1 = 0$. Ses racines sont $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$ et $v_n = \lambda 3^n + \mu(-2)^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales donnent ici $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et $\mu = -\dfrac{1}{2}$.

21.11 b) Le plus simple (pour un si petit indice) est d'utiliser la relation de récurrence de la suite : $v_2 = 2v_1 + v_0 = 2\sqrt{2}$. Pour travailler les identités remarquables, d'après le a) : $v_2 = \dfrac{(1 + \sqrt{2})^2 - (1 - \sqrt{2})^2}{2} = \dfrac{3 + 2\sqrt{2} - (3 - 2\sqrt{2})}{2} = 2\sqrt{2}$.

21.12 a) $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$.

21.12 b) $F_5 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\ 537$.

21.12 c) $(F_{n-1}-1)^2+1=\left(2^{2^{n-1}}\right)^2+1=2^{2^{n-1}\times 2}+1=2^{2^n}+1=F_n.$

21.12 d) $F_n\times(F_n-2)=\left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^n}-1\right)=\left(2^{2^{n+1}}-1\right)=F_{n+1}-2.$

21.12 e) $F_n^2=\left(2^{2^n}+1\right)^2=\left(2^{2^n}\right)^2+2\cdot 2^{2^n}+1=2^{2^{n+1}}+1+2^{2^n+1}=F_{n+1}+2^{2^n+1}.$

21.12 f) $F_{n+1}^2-2(F_n-1)^2=F_{n+2}+2\cdot 2^{2^{n+1}}-2(F_{n+1}-1)=F_{n+2}+2\cdot 2^{2^{n+1}}-2\cdot 2^{2^{n+1}}=F_{n+2}.$

Fiche n° 22. Développements limités

Réponses

22.1 a) .... $3x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

22.1 b) .... $x - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{11}{6}x^3 - \dfrac{25}{12}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

22.1 c) .... $x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} - \dfrac{x^6}{90} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6)$

22.2 a) .... $\mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}x}{2} + \dfrac{11\mathrm{e}x^2}{24} - \dfrac{7\mathrm{e}x^3}{16} + \dfrac{2447\mathrm{e}x^4}{5760} + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)$

22.2 b) .... $1 - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{96}x^4 - \dfrac{19}{5760}x^6 + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^7)$

22.2 c) .... $1 - x + \dfrac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\big((x-1)^2\big)$

22.3 a) .... $1 - \dfrac{3\pi^2}{8}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2 + \underset{x\to \frac{\pi}{3}}{\mathrm{o}}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2\right)$

22.3 b) .... $1 + 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \dfrac{8}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3 + \underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\mathrm{O}}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^4\right)$

Corrigés

22.1 a) Il suffit d'effectuer la somme des parties régulières des dévelopements limités à l'ordre 4 en 0 de $\sin(x)$ et $\ln(1+x)$. On écrit donc $f(x) = 2\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\right) + x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4) = 3x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$.

....

22.1 b) Il suffit d'effectuer le produit des parties régulières des dévelopements limités à l'ordre 4 en 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{x+1}$ et de ne conserver que les termes de degré au plus 4. Observez que le développement limité à l'odre 3 de $\dfrac{1}{x+1}$ suffit puisque celui de $\ln(1+x)$ à son terme constant nul. On écrit donc

$$f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4).$$

22.1 c) Il suffit d'écrire :

$$\mathrm{e}^x\sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6)\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6).$$

22.2 a) En utilisant les développements limités en 0 de $\ln(1+x)$ (à l'ordre 5) et de l'exponentielle (à l'ordre 4), on a : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) = \exp\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{5} + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)\right) = \mathrm{e}\exp\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{5} + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)\right)$.

Puis : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}\left(1 + \left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{5}\right) + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3}\right)^3 + \dfrac{1}{24}\left(-\dfrac{x}{2}\right)^4\right) + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)$.

Observez qu'il n'est pas utile de faire apparaître tous les termes de la partie régulière du développement limité de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ selon la puissance à laquelle on la considère.

D'où : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}x}{2} + \dfrac{11\mathrm{e}x^2}{24} - \dfrac{7\mathrm{e}x^3}{16} + \dfrac{2447\mathrm{e}x^4}{5760} + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)$.

22.2 b) On a

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^7)\\ \sqrt{u} &= 1 + \frac{1}{2}(u-1) - \frac{1}{8}(u-1)^2 + \frac{1}{16}(u-1)^3 + \underset{u\to 1}{\mathrm{O}}((u-1)^4)\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos(x)} &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^7)\\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{19}{5760}x^6 + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^7).\end{aligned}$$

22.2 c) Etablir l'existence et donner le développement limité de $f(x) = \dfrac{\ln(2-x)}{x^2}$, en 1 à l'ordre 2, revient à le faire, en 0 à l'ordre 2, pour l'application g définie par $g(t) = f(1+t) = \dfrac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}$. Or $\ln(1-t) = -t - \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2)$ et $\dfrac{1}{(1+t)^2} = \left(1 - t + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)\right)^2 = 1 - 2t + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$. D'où $g(t) = \left(-t - \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2)\right)\left(1 - 2t + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)\right) = -t + \dfrac{3}{2}t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2)$ et $f(x) = g(x-1) = 1 - x + \dfrac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\big((x-1)^2\big)$.

22.3 a) La formule de Taylor-Young affirme que $\cos(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\mathrm{o}}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ (observez que l'ordre 1 sera suffisant !) et

$\sin(t) = 1 - \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{\mathrm{o}}\left(\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)^2\right)$. D'où $\sin(\pi\cos(x)) = 1 - \dfrac{3\pi^2}{8}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2 + \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\mathrm{o}}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2\right)$

22.3 b) On sait que $\tan(t) = t + \dfrac{t^3}{3} + \underset{t\to 0}{\mathrm{O}}(t^4)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\tan(t)}{1-\tan(t)} = \frac{1+t+\dfrac{t^3}{3}+\underset{t\to 0}{\mathrm{O}}(t^4)}{1-t-\dfrac{t^3}{3}+\underset{t\to 0}{\mathrm{O}}(t^4)} &= \left(1+t+\frac{t^3}{3}+\underset{t\to 0}{\mathrm{O}}(t^4)\right)\left(1+t+t^2+\frac{4}{3}t^3+\underset{t\to 0}{\mathrm{O}}(t^4)\right)\\ &= 1+2t+2t^2+\frac{8}{3}t^3+\underset{t\to 0}{\mathrm{O}}(t^4).\end{aligned}$$

D'où finalement $\tan(x) = 1 + 2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) + 2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \dfrac{8}{3}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^3 + \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\mathrm{O}}\left(\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^4\right)$.

....

Fiche nº 23. Calcul matriciel

Réponses

23.1 a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

23.1 b) $\begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix}$

23.1 c) 17 (matrice 1×1)

23.1 d) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

23.1 e) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

23.1 f) $\begin{pmatrix} -5 & 15 & 3 \end{pmatrix}$

23.1 g) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

23.1 h) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

23.1 i) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix}$

23.2 a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

23.2 b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

23.2 c) $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

23.2 d) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

23.2 e) $\begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

23.2 f) $\begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$

23.2 g) $\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$

23.2 h) $\begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix}$

23.2 i) $\begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$

23.2 j) $\begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$

23.2 k) $\begin{pmatrix} n^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & (n^2) & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$

23.2 l) $n^{k-1}D$

23.3 a) $\dfrac{1}{2(\pi - e)}\begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$

23.3 b) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1-2\mathrm{i} \\ 1 & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$

23.3 c) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

23.3 d) $\dfrac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

23.3 e) $\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

23.3 f) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

23.3 g) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

23.3 h) Non inversible !

23.3 i) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

23.4 a) $\lambda \neq 1$

23.4 b) $\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

23.4 c) $\lambda \neq 1$

23.4 d) ..... $\boxed{\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}}$

Corrigés

23.2 a) Un calcul direct donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

23.2 b) Un calcul direct donne $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

23.2 c) La conjecture est alors immédiate : les termes diagonaux sont égaux à 1 et le terme $(1,2)$ est égal à k.

23.2 d) On calcule : $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

23.2 e) On calcule : $B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.

23.2 f) On remarque que les termes diagonaux valent 2^k et 3^k respectivement, et que, pour A^2, $4+5=9$, pour A^3, $8+19=27$, donc on peut conjecturer que $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 3^k-2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$.

23.2 g) On calcule :

$$C^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

23.2 j) Deux possibilités de faire le calcul : « à la main », ou bien avec la formule théorique du produit.
À la main, on remarque que lorsque l'on effectue le produit $D \times D$, chaque coefficient résultera du produit d'une ligne de 1 par une colonne de 1, donc sera égal à n : $D \times D = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nD$.

En utilisant les coefficients, on peut écrire que

$$[D^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [D]_{ik}[D]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

23.2 k) Comme $D^2 = nD$, $D^3 = D \times nD = nD^2 = n \times nD = n^2 D$.

23.2 l) La conjecture est alors évidente.

23.3 a) On remarque que $2\pi - 2e = 2(\pi - e) \neq 0$, donc A est inversible d'inverse $\dfrac{1}{2(\pi-e)}\begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$.

23.3 c) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1\end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1\end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2/2$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1\end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2\end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & -1/2\\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1\end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 1/2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 1/2L_3 \\ \\ \end{array}$$

Donc B est inversible d'inverse $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 3 & 2 & -1\\ -6 & -2 & 2\end{pmatrix}$

23.3 d) Il ne faut pas avoir peur du π et écrire que $C = \pi\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$. On calcule alors (par pivot de Gauss) que $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, donc C est inversible d'inverse $\dfrac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

23.3 h) On remarque que $L_3 = L_1 + 2L_2 + 2L_4$.

23.4 a) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1\end{array}$$

Si $\lambda = 1$, alors la matrice n'est pas inversible. Sinon,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 3/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \dfrac{1}{1-\lambda}L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2\end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 0 & 4/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & -3/(1-\lambda)\\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \dfrac{3}{1-\lambda}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (1+2\lambda)L_3\end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -4/(1-\lambda) & -1/(1-\lambda) & 3/(1-\lambda)\\ 0 & 1 & 0 & (2\lambda+2)/(1-\lambda) & \lambda/(1-\lambda) & (-2\lambda-1)/(1-\lambda)\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow \dfrac{1}{1-\lambda}L_2\end{array}$$

Dans ce cas, l'inverse de la matrice est $\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix}-4 & -1 & 3\\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1\\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}$

Fiche n° 24. Algèbre linéaire

Réponses

24.1 a) $(3,-1)$

24.1 b) $(-1,3)$

24.1 c) $(9/11, 2/11)$

24.1 d) $(-2, 4/5, 11/5)$

24.1 e) $(-1, 1/2, 1/2)$

24.2 a) 2

24.2 b) 1

24.2 c) 1

24.2 d) 2

24.2 e) 2

24.2 f) 1

24.3 a) 2

24.3 b) 2

24.3 c) 3

24.3 d) 4

24.4 a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

24.4 b) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

24.4 c) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$

24.4 d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

24.5 a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}$

Corrigés

24.1 a) Notons $u = \lambda(0,1) + \mu(-1,2)$. Alors, $\begin{cases} -\mu & = 1 \\ \lambda + 2\mu & = 1 \end{cases}$. Ainsi, $u = 3(0,1) - (-1,2)$.

24.1 b) Notons $u = \lambda(0,1) + \mu(-1,2)$. Alors, $\begin{cases} -\mu & = 1 \\ \lambda + 2\mu & = 1 \end{cases}$. Ainsi, $u = -(-1,2) + 3(0,1)$.

24.1 c) Notons $u = \lambda(1,2) + \mu(12,13)$. Alors,

$$\begin{cases} \lambda + 12\mu & = 3 \\ 2\lambda + 13\mu & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 12\mu & = 3 \\ -11\mu & = -2 \end{cases}$$

Ainsi, $u = \dfrac{9}{11}(1,2) + \dfrac{2}{11}(12,13)$.

24.1 d) On note $u = \lambda(0,1,3) + \mu(4,5,6) + \nu(-1,0,1)$. Alors,

$$\begin{cases} 4\mu - \nu & = 1 \\ \lambda + 5\mu & = 2 \\ 3\lambda + 6\mu + \nu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu & = 2 \\ 4\mu - \nu & = 1 \\ -9\mu + \nu & = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu & = 2 \\ -\nu + 4\mu & = 1 \\ -5\mu & = -4 \end{cases}$$

Ainsi, $u = -2(0,1,3) + \dfrac{4}{5}(4,5,6) + \dfrac{11}{5}(-1,0,1)$.

24.1 e) Notons $u = \lambda(1,0,1) + \mu(1,1,1) + \nu(-1,-1,3)$. Alors,

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \nu & = -1 \\ \mu - \nu & = 0 \\ \lambda + \mu + 3\nu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu - \nu & = -1 \\ \mu - \nu & = 0 \\ 4\nu & = 2 \end{cases}$$

Ainsi, $u = -(1,0,1) + \dfrac{1}{2}(1,1,1) + \dfrac{1}{2}(-1,-1,3)$.

24.2 a) Les colonnes de la matrice ne sont pas colinéaires.

24.2 b) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

24.2 c) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

....

24.2 d) Les deux premiers vecteurs colonnes sont non colinéaires, le troisième est la somme des deux premiers.

....

24.2 e) Les deux vecteurs colonnes ne sont pas colinéaires.

....

24.2 f) Toutes les colonnes sont égales à la première qui est non nulle.

....

24.3 a) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{Rg}(A) = 2$.

....

24.3 b) Si $\sin\theta = 0$, i.e. il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = n\pi$, alors la matrice est égale à $\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ et elle est de rang 2.

Sinon, on effectue l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow \sin(\theta)L_1 - \cos(\theta)L_2$ pour obtenir la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 car $\sin(\theta) \neq 0$.

....

24.3 c) En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi, le rang de la matrice vaut 3.

....

24.3 d) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & -7 & -13 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $C_2 \leftrightarrow C_3$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 6 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -37 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Comme les deux dernières lignes sont linéairement indépendantes, le rang de la matrice vaut 4.

....

24.4 a) D'une part, $f(1,0) = (1,3) = 1 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1)$. D'autre part, $f(0,1) = (1,-5) = 1 \cdot (1,0) - 5 \cdot (0,1)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

....

24.4 b) D'une part, $f(0,1) = (1,-5) = -5 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0)$. D'une part, $f(1,0) = (1,3) = 3 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

....

24.4 c) $f(1,2) = (4,-1)$ et $f(3,4) = (10,-1)$. De plus, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique vaut

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $P\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43/2 \\ 21/2 \end{pmatrix}$. Donc $f(1,2) = -\frac{19}{2}(1,2) + \frac{9}{2}(3,4)$ et $f(3,4) = -\frac{43}{2}(1,2) + \frac{21}{2}(3,4)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$.

....

24.4 d) Comme $f(1,0,0) = (1,3,0) = (1,0,0) + 3(0,1,0) + 0(1,1,1)$, $f(0,1,0) = (1,0,1) = 0 \cdot (1,0,0) - (0,1,0) + (1,1,1)$ et $f(1,1,1) = (2,2,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (1,1,1)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

....

24.5 a) Comme $f(0,1,3) = (4,-1) = -1(0,1) + 4(1,0)$, $f(4,5,6) = (15,-1) = -1(0,1) + 15(1,0)$ et $f(-1,0,1) = (0,-1) = -(0,1) + 0(1,0)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

....

Fiche n° 25. Équations différentielles

Réponses

25.1 a) .... $\boxed{x \mapsto 56e^{12x}}$

25.1 b) .... $\boxed{x \mapsto 6e^{x} - 1}$

25.1 c) .... $\boxed{x \mapsto \dfrac{8e^{3x} - 5}{3}}$

25.1 d) .... $\boxed{x \mapsto 9e^{2x} - 6}$

25.2 a) .... $\boxed{x \mapsto e^{(6-x)/5}}$

25.2 b) .... $\boxed{x \mapsto 1 - 2e^{-2x/7+2}}$

25.2 c) .... $\boxed{x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)e^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}}$

25.2 d) .... $\boxed{x \mapsto \left(12 + \dfrac{2e}{\pi}\right)e^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}}$

25.3 a) .... $\boxed{x \mapsto e^{2x}}$

25.3 b) .... $\boxed{x \mapsto e^{x}}$

25.3 c) .... $\boxed{x \mapsto 2e^{2x} - e^{x}}$

25.4 a) .... $\boxed{x \mapsto e^{x}}$

25.4 b) .... $\boxed{x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x}}$

25.4 c) .... $\boxed{x \mapsto \dfrac{4}{3}e^{x} - \dfrac{1}{3}e^{-2x}}$

25.4 d) .... $\boxed{x \mapsto (2-x)e^{x}}$

25.4 e) .... $\boxed{x \mapsto (2-x)e^{2-2x}}$

25.5 a) .... $\boxed{x \mapsto \cos x + 2\sin x}$

25.5 b) .... $\boxed{x \mapsto e^{-x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)}$

25.5 c) .... $\boxed{x \mapsto e^{-x}\sin(x)}$

Corrigés

25.1 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 12y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{12x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{12x}$.

Alors, $y_0(0) = 56 = \lambda$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 56e^{12x}$.

....

25.1 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \mu + 1$ soit $\mu = -1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} - 1$. Alors, $y_0(0) = 5 = \lambda - 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 6e^{x} - 1$.

....

25.1 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 3y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 3\mu + 5$ soit $\mu = -5/3$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{3x} - 5/3$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda - 5/3$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \dfrac{8e^{3x} - 5}{3}$.

....

25.1 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 2y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 2\mu + 12$ soit $\mu = -6$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{2x} - 6$.

Alors, $y_0(0) = 3 = \lambda - 6$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 9e^{2x} - 6$.

....

25.2 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'équation est homogène et son ensemble de solutions est $\left\{x \mapsto \lambda e^{-x/5},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-x/5}$.

Alors, $y_0(1) = e = \lambda e^{-1/5}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto e^{(6-x)/5}$.

....

25.2 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + \dfrac{2}{7}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{-2x/7},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 + 2\mu = 2$ soit $\mu = 1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-2x/7} + 1$. Alors, $y_0(7) = -1 = \lambda e^{-2} + 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto -2e^{-2x/7+2} + 1$.

25.2 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \sqrt{5}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{\sqrt{5}x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 - \sqrt{5}\mu = 6$ soit $\mu = -\dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

Alors, $y_0(0) = \pi = \lambda - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)e^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

25.2 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \pi y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{\pi x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \pi\mu + 2e$ soit $\mu = -\dfrac{2e}{\pi}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{\pi x} - \dfrac{2e}{\pi}$. Alors, $y_0(\pi) = 12 = \lambda e^{\pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}$.

Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(12 + \dfrac{2e}{\pi}\right)e^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}$.

25.3 a) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 2$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{2x}$.

25.3 b) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 1$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{x}$.

25.3 c) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2+1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ et on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 3$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 2$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 2e^{2x} - e^{x}$.

25.4 a) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont -1 et 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda - \mu = 1$. En additionnant et soustrayant ces relations, on obtient $\lambda = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{x}$.

25.4 b) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont -1 et -2 (car $-1 - 2 = -3$ et $(-2) \cdot (-1) = 2$ et on reconnaît $r^2 - (-2-1)r + (-2) \cdot (-1)$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 2$ et $y'(0) = -\lambda - 2\mu = 3$. Le système se réduit en $\lambda + \mu = 2$ et $-\mu = 5$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x}$.

25.4 c) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + r - 2 = 0$. Le discriminant du trinôme vaut 9 et ses racines sont -2 et 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda - 2\mu = 2$. Le système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $-3\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \dfrac{4}{3}e^{x} - \dfrac{1}{3}e^{-2x}$.

25.4 d) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = 0$ dont la racine double est 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe

$(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x\mapsto(\lambda+\mu x)\mathrm{e}^x$.

Alors, $y(0)=\lambda=2$ et $y'(0)=\lambda+\mu=1$. Ainsi, $y_0 : x\mapsto(2-x)\mathrm{e}^x$.

....

25.4 e) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2+4r+4=0$ dont la racine double est -2. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x\mapsto(\lambda+\mu x)\mathrm{e}^{-2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x\mapsto(\lambda+\mu x)\mathrm{e}^{-2x}$.

Alors, $y(1)=(\lambda+\mu)\mathrm{e}^{-2}=1$ et $y'(1)=(-2\lambda+\mu-2\mu)\mathrm{e}^{-2}=-3$. Le système s'écrit $\lambda+\mu=\mathrm{e}^2$ et $2\lambda+\mu=3\mathrm{e}^2$. Il se réduit en $\lambda+\mu=\mathrm{e}^2$ et $\lambda=2\mathrm{e}^2$. Ainsi, $y_0 : x\mapsto(2-x)\mathrm{e}^{2-2x}$.

....

25.5 a) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2+1=0$ dont les solutions sont i et $-\mathrm{i}$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x\mapsto\lambda\cos x+\mu\sin x,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x\mapsto\lambda\cos x+\mu\sin x$.

Alors, $y_0(0)=1=\lambda$ et $y_0'(0)=2=\mu$. Ainsi, $y_0 : x\mapsto\cos x+2\sin x$.

....

25.5 b) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2+r+1=0$. Les résultats sur les racines de l'unité assurent que les solutions de cette équation sont $\mathrm{j}=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{\mathrm{j}}$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x\mapsto\mathrm{e}^{-x/2}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+\mu\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x\mapsto\mathrm{e}^{-x/2}\left(\lambda\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2}+\mu\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

Alors, $y_0(0)=1=\lambda$ et $y_0'(0)=-1=-\dfrac{\lambda}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mu$. Ainsi, $y_0 : x\mapsto\mathrm{e}^{-x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

....

25.5 c) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2+2r+2=0$. Le discriminant réduit du trinôme vaut -1 et ses racines sont $-1-\mathrm{i}$ et $-1+\mathrm{i}$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est $\left\{x\mapsto\mathrm{e}^{-x}(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$. Il existe donc $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x\mapsto\mathrm{e}^{-x}(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x))$.

Alors, $y_0(0)=0=\lambda$ et $y_0'(0)=1=-\lambda+\mu$. Ainsi, $y_0 : x\mapsto\mathrm{e}^{-x}\sin(x)$.

....