Devoir d'été de Mathématiques

Devoir à rendre lors du premier cours de mathématiques (non noté).
La difficulté de ces questions est assez variable. Si vous avez des difficultés pour répondre à certaines d'entre elles (en particulier pour ceux qui ont fait maths complémentaires en terminale), ne vous inquiétez pas, certaines notions seront revues en ECG. Mais profitez de l'été pour essayer de combler vos lacunes.

Exercice 1

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera la réponse.

1. Pour tout réel x, $x^2 \geqslant x$.
2. Si $x > -1$ alors $x^2 > 1$.
3. Pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1} > x$.
4. Soit a, b, c, d des réels. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $ac \leqslant bd$.
5. Soit a, b, c des réels non nuls. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x admet deux solutions si et seulement si a et c sont de signes contraires.
6. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. f est croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant f(x+1)$.
7. Une suite arithmétique de raison positive est croissante.
8. Une suite géométrique de raison positive est croissante.
9. Si (u_n) est une suite dont tous les termes sont compris entre 0 et 2, alors (u_n) a une limite comprise entre 0 et 2.
10. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.
11. Pour tous réels x, y, $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$.
12. Pour tous réels x, y, $e^x \geqslant y \Leftrightarrow x \geqslant \ln(y)$.
13. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} \geqslant -2$.
14. Pour tout réel x, si $\cos x = \frac{1}{2}$ alors $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$.
15. Pour tout réel x, si $\cos x = \frac{1}{2}$ alors $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
16. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Si f' est positive sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}^*$.
17. Si A et B sont deux événements, avec B et $\overline{B}$ de probabilités non nulles, alors $P(A) = P_B(A) + P_{\overline{B}}(A)$.
18. Si X est une variable aléatoire prenant les valeurs -1, 0 et 1, alors $E(X) = 0$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Expliqur pourquoi la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x)$. Calculer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
3. Vérifier que $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln(3) - 2\ln(2)$.
4. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   (b) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$ en y faisant figurer les éléments obtenus aux questions 2 et 3.
5. (a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x.

(b) Déterminer des équations des tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses 0 et -1.

6. (a) Calculer la dérivée seconde de f.

   (b) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. Vérifier que $\mathcal{C}$ admet exactement deux points d'inflexions aux points d'abscisses $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 3

Dans cet exercice on suppose que l'on dispose de deux urnes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. L'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules rouges tandis que l'urne $\mathcal{V}$ contient deux boules rouges et deux boules blanches.
On commence par lancer une pièce non truquée. Si l'on obtient "pile" on choisit de faire une succession de tirages dans l'urne $\mathcal{U}$. Dans le cas contraire on choisit de faire les tirages dans l'urne $\mathcal{V}$.
On considère les événements :

- F : "la pièce amène face".
- $\overline{F}$: "la pièce amène pile".
- R_k : "le k-ième tirage dans l'urne choisie amène une boule rouge", pour tout $k \geqslant 1$.
- B_k : "le k-ième tirage dans l'urne choisie amène une boule blanche", pour tout $k \geqslant 1$.

1. On lance la pièce, on choisit l'urne puis on effectue un tirage.

   (a) Justifier que la probabilité de tirer une boule rouge est $\dfrac{3}{4}$.

   (b) On remarque à postériori que la boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité que la pièce ait amené pile ?

2. On lance la pièce, on choisit l'urne puis on effectue deux tirages *sans remise*. C'est-à-dire que la boule tirée lors du premier tirage n'est pas remise dans l'urne avant de procéder au deuxième tirage dans la même urne.

   (a) Calculer $P_F(R_1 \cap R_2)$ et $P_{\overline{F}}(R_1 \cap R_2)$.

   (b) En déduire que la probabilité que le tirage amène deux boules rouges de suite est $\dfrac{7}{12}$.

3. On lance la pièce, on choisit l'urne puis on décide de faire des tirages *sans remise* dans l'urne choisie jusqu'à ce que l'on soit en mesure de déterminer avec certitude dans quelle urne l'on se trouve. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

   (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![1, 3]\!]$.

   (b) Expliquer pourquoi $(Y = 1) = F \cap B_1$. En déduire $P(Y = 1)$.

   (c) Calculer de même $P(Y = 2)$.

   (d) Déduire des questions précédentes que $P(Y = 3) = \dfrac{7}{12}$.

   (e) Calculer $E(Y)$.

4. Dans cette question, on effectue 10 tirages *avec remise* dans l'urne $\mathcal{V}$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages donnant une boule rouge.

   (a) Reconnaître la loi de X. On donnera $X(\Omega)$ et pour tout $k \in X(\Omega)$, la valeur de $P(X = k)$.

   (b) Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

   (c) Déterminer la probabilité de tirer au moins une boule rouge.

Exercice 4

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 3u_n + 2n - 3$

1. Montrer que $u_2 = 2$. Calculer u_3.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 1$.

3. En déduire sans récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant 2(n-1)$.

4. Déterminer alors la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

6. Dans cette question, on souhaite déterminer l'expression de u_n en fonction de n. Pour cela, on introduit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie à partir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = u_n + n - 1$$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n en fonction de n uniquement.

   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.